



INSTITUTO PARA LA CALIDAD DE LA EDUCACIÓN  
SECCIÓN DE POSGRADO

**APLICACIÓN DEL GEOGEBRA Y SU INFLUENCIA EN LOS  
MÉTODOS DE SOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE SISTEMAS DE  
ECUACIONES LINEALES EN ESTUDIANTES DE SECUNDARIA**

**PRESENTADA POR**

**ANA CLEMENCIA CORDOVA ESPINOZA**

**ASESOR**

**OSCAR RUBÉN SILVA NEYRA**

**TESIS**

**PARA OPTAR EL GRADO ACADÉMICO DE MAESTRA EN EDUCACIÓN**

**LIMA – PERÚ**

**2020**



**CC BY-NC-SA**

**Reconocimiento – No comercial – Compartir igual**

El autor permite transformar (traducir, adaptar o compilar) a partir de esta obra con fines no comerciales, siempre y cuando se reconozca la autoría y las nuevas creaciones estén bajo una licencia con los mismos términos.

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>



**INSTITUTO PARA LA CALIDAD DE LA EDUCACIÓN  
SECCIÓN DE POSGRADO**

**APLICACIÓN DEL GEOGEBRA Y SU INFLUENCIA EN LOS  
MÉTODOS DE SOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE SISTEMAS  
DE ECUACIONES LINEALES EN ESTUDIANTES DE  
SECUNDARIA**

**TESIS PARA OPTAR  
EL GRADO ACADÉMICO DE MAESTRA EN EDUCACIÓN**

**PRESENTADO POR:  
ANA CLEMENCIA, CORDOVA ESPINOZA**

**ASESOR:  
DR. OSCAR RUBÉN SILVA NEYRA**

**LIMA, PERÚ**

**2020**

**APLICACIÓN DEL GEOGEBRA Y SU INFLUENCIA EN LOS  
MÉTODOS DE SOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE SISTEMAS  
DE ECUACIONES LINEALES EN ESTUDIANTES DE  
SECUNDARIA**

## **ASESOR Y MIEMBROS DEL JURADO**

### **ASESOR:**

Dr. Oscar Rubén Silva Neyra

### **PRESIDENTE DEL JURADO:**

Dra. Alejandra Dulvina Romero Díaz

### **MIEMBROS DEL JURADO:**

Dr. Carlos Augusto Echaíz Rodas

Mg. Augusto José Willy Gonzales Torres

## **DEDICATORIA**

A mi MADRE por enseñarme el valor del trabajo y la humildad.

A mis queridos hijos y estimada hermana Violeta por haber sido de algún modo mi soporte moral durante este largo tiempo.

A todas las personas que de manera anónima contribuyeron a mi desarrollo académico.

## **AGRADECIMIENTO**

Al Espíritu Santo: Por permanecer conmigo y ayudarme a culminar esta labor de manera satisfactoria, en una etapa más de mi vida.

A mis hijos: Víctor Alejandro y Juan Fernando, por ser mis grandes amores, mi fuerza y motivo para incentivarme a la superación profesional.

## ÍNDICE

ASESOR Y MIEMBROS DEL JURADO	iii
DEDICATORIA	iv
AGRADECIMIENTO	v
<b>ÍNDICE</b>	vi
<b>ÍNDICE DE TABLA</b>	viii
<b>ÍNDICE DE FIGURA</b>	x
<b>RESUMEN</b>	xi
<b>ABSTRACT</b>	xii
<b>INTRODUCCIÓN</b>	1
<b>CAPÍTULO I: MARCO TEÓRICO</b>	<b>5</b>
1.1 Antecedentes de la investigación	5
1.2 Bases teóricas	7
1.2.1 Software GeoGebra	7
1.2.2 Enseñanza aprendizaje de las matemáticas.	11
1.2.3 Sistema de ecuaciones lineales	18
1.2.4 Competencias y capacidades en matemáticas	25
1.2.5 Aplicación de las TIC en el Currículo Nacional.	29
1.3 Definición de términos básicos	30



<b>CAPÍTULO II: HIPÓTESIS Y VARIABLES</b>	34
2.1 Formulación de hipótesis principal y derivadas	34
2.1.1 Hipótesis general	34
2.1.2 Hipótesis derivadas	34
2.1.3 Variables y definición operacional	34
<b>CAPÍTULO III: METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN</b>	38
3.1 Diseño metodológico	38
3.2 Diseño muestral	39
3.3 Técnicas de recolección de datos	39
3.4 Técnicas estadísticas para el procesamiento de la información	40
3.5 Aspectos éticos	41
<b>CAPÍTULO IV: RESULTADOS</b>	42
4.1 Resultados del aprendizaje de métodos de solución de problemas de sistemas de ecuaciones lineales.	42
4.2 Prueba de hipótesis	58
<b>CAPÍTULO V: DISCUSIÓN</b>	67
<b>CONCLUSIONES</b>	69
<b>RECOMENDACIONES</b>	71
<b>FUENTES DE INFORMACIÓN</b>	72
<b>ANEXOS</b>	77
Anexo 1: Matriz de Consistencia	78
Anexo 2: Instrumentos para la recolección de datos	80

## ÍNDICE DE TABLA

Tabla 1.	Diversas representaciones de un sistema de ecuaciones .....	20
Tabla 2.	Resolución de un sistema de ecuaciones .....	21
Tabla 3.	Variable independiente (X): Aplicación del GeoGebra .....	36
Tabla 4.	Variable dependiente (Y): Métodos de solución de problemas para sistemas de ecuaciones lineales.....	37
Tabla 5.	Grupos de investigación .....	39
Tabla 6.	Resultados juicio de expertos .....	40
Tabla 7.	Puntuación pretest en la solución de problemas de sistemas de ecuaciones de lineales de los grupos de control y experimental .....	43
Tabla 8.	Puntuación posttest de la solución de problemas del sistema de ecuaciones lineales de los grupos de control y experimental .....	44
Tabla 9.	Puntuación pretest de la comprensión de la reducción de sistemas de ecuaciones de lineales de los grupos de control y experimental .....	46
Tabla 10.	Puntuación posttest en la comprensión del método de reducción de sistemas de ecuaciones lineales de los grupos de control y experimental .....	48
Tabla 11.	Puntuación pretest en la comprensión del método de sustitución en sistemas de ecuaciones lineales de los grupos de control y experimental .....	50
Tabla 12.	Puntuación posttest en la comprensión del método de sustitución en sistemas de ecuaciones de lineales de los grupos de control y experimental .....	52
Tabla 13.	Puntuación pretest en la comprensión del método de igualación en sistemas de ecuaciones lineales de los grupos de control y experimental .....	54
Tabla 14.	Puntuación posttest en la comprensión del método de igualación de sistemas de ecuaciones de lineales de los grupos de control y experimental .....	56
Tabla 15.	Prueba de normalidad.....	58

Tabla 16. Estadísticas de los grupos .....	59
Tabla 17. Prueba de muestras independientes.....	60
Tabla 18. Estadísticas de grupo .....	61
Tabla 19. Prueba de muestras independientes.....	62
Tabla 20. Estadísticas de grupo .....	63
Tabla 21. Prueba de muestras independientes.....	64
Tabla 22. Estadísticas de grupo .....	65
Tabla 23. Prueba de muestras independientes.....	66

## ÍNDICE DE FIGURA

Figura 1. Tomado de los “Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. ....	13
---	----

## RESUMEN

Se buscó establecer la influencia del empleo del programa GeoGebra en la comprensión de métodos de resolución de problemas en sistema de ecuaciones lineales en el proceso de aprendizaje. Se desarrolló con los alumnos de 5to grado de educación secundaria en la Institución Educativa “Leoncio Prado” de Ate bajo el enfoque cuantitativo con un diseño cuasiexperimental pretest posttest con grupo de control, formado por 28 estudiantes cada grupo, a quienes se les administró un cuestionario antes y después con el propósito de evaluar el desarrollo de la capacidad de solución de problemas. Los resultados muestran que el promedio de puntuación en el grupo con GeoGebra es 15,64 y en el grupo sin GeoGebra es 13,25 mostrándose diferencias, asimismo, se observa el incremento significativo de la puntuación determinada en el pre test (10,21) en relación al posttest (15,64) del grupo que trabajó con GeoGebra. Concluyéndose que empleando GeoGebra se influye significativamente sobre el aprendizaje de los métodos de solución de problemas de sistemas de ecuaciones lineales.

**Palabras claves:** Ecuaciones lineales, GeoGebra, aprendizaje

## **ABSTRACT**

We sought to establish the influence of the use of the GeoGebra program in the comprehension of problem-solving methods in the system of linear equations in the learning process. It was developed with the students of 5th grade of secondary education in the Educational Institution "Leoncio Prado" of Ate under the quantitative approach with a quasi-experimental pretest posttest design with control group, formed by 28 subjects each group, who were administered a questionnaire before and after for the purpose of evaluating the development of problem solving capacity. The results show that the average score in the group with GeoGebra is 15.64 and in the group without GeoGebra it is 13.25, showing differences, as well as the significant increase in the score determined in the pretest (10.21) in relation to the posttest (15.64) of the group that worked with GeoGebra. Concluding that employing GeoGebra significantly influences the learning of problem-solving methods of linear equation systems.

**Key words:** Linear equations, GeoGebra, learning.

## INTRODUCCIÓN

La investigación está motivada por el problema del rendimiento en el área de matemáticas en los alumnos del 5to grado del nivel secundario de la Institución Educativa “Leoncio Prado”, específicamente en la resolución de problemas de sistemas de ecuaciones lineales, por ello, el propósito fundamental de la investigación fue introducir una propuesta para mejorar los logros en el aprendizaje basada en la aplicación del programa GeoGebra, dado que este programa permite potenciar la percepción visual gráfica en el proceso de solución de problemas para un sistema de ecuaciones lineales, facilitando con ello la comprensión y apropiación de los métodos de resolución de problemas en sistemas de ecuaciones.

Todo estudiante desde el inicio de su escolaridad trabaja las mismas competencias y capacidades en el área de matemática, establecidas por el Ministerio de Educación.

El área de matemáticas para la Educación Básica Regular (EBR) varía las competencias y capacidades en el nivel de complejidad en cada grado desarrollándose a lo largo del proceso escolar; éste avance debería ser sostenible y continuo en su transición de un grado a otro, asimismo, se debe aprovechar todos.

Los recursos educativos incluyen las tecnologías para innovar los procesos de enseñanza aprendizaje, asumiendo el contexto actual de cambios donde las tecnologías son herramientas fundamentales para el proceso de enseñanza por los docentes y el aprendizaje de los estudiantes.

Las dificultades identificadas en los estudiantes en la realización de las actividades de aprendizaje referidas al proceso de resolución de problemas motivaron la búsqueda de alternativas que ayuden al desarrollo de estrategias en el área de matemáticas, específicamente en las ecuaciones lineales y el aprovechamientos de los recursos tecnológicos, nos llevaron a plantear el problema a investigar: ¿En qué medida el empleo de GeoGebra favorece la comprensión de los métodos de solución de problemas de sistemas de ecuaciones lineales en estudiantes del 5to grado del nivel secundario en la I.E. N° 1228 “Leoncio Prado” de Ate, Lima, 2018?

La tesis, posibilitó determinar la influencia que se presenta por la integración de los recursos que ofrecen las tecnologías de la información y comunicación, específicamente referida al aprovechamiento del programa GeoGebra sobre el desarrollo de métodos de solución para el aprendizaje de sistemas de ecuaciones lineales correspondientes al área de matemáticas trabajando con los estudiantes de Educación Básica Regular (EBR) correspondientes al nivel de educación secundaria.

Se buscó demostrar la siguiente hipótesis: El empleo de GeoGebra favoreció significativamente la comprensión de los métodos de solución de problemas de sistemas de ecuaciones lineales en los estudiantes del 5º grado del nivel secundario en la I.E. N° 1228 “Leoncio Prado” de Ate, Lima, 2018, mediante la experimentación.

El estudio contribuyó al análisis y evaluación de nuevos escenarios de aprendizaje significativo por medio de recursos informáticos al utilizar el GeoGebra como recurso para la enseñanza aprendizaje de las matemáticas orientado a incentivar y mejorar los aprendizajes. Desde el aspecto práctico, su contribución se centra en la integración del software GeoGebra en la ejecución de las sesiones de aprendizaje para resolver problemas matemáticos de ecuaciones lineales, el cual servirá para motivar y resolver los casos planteados en las actividades, procediéndose a registrar e informar los resultados de esta metodología de aprendizaje con la computadora y el uso del GeoGebra. Los beneficiarios serán los estudiantes, ya que ellos tendrían una nueva forma de entender, aplicar y comprobar los métodos de resolución correcta en ejercicios sobre sistemas de ecuaciones



en la asignatura de Matemática, facilitándoles la comprensión, resolución y comprobación de problemas de sistema de ecuaciones.

Algunas limitaciones que se presentaron durante la ejecución del estudio estuvieron centradas en la escasa bibliografía especializada referida al empleo de las tecnologías en las sesiones de enseñanza aprendizaje de las matemáticas, específicamente de sistemas de ecuaciones lineales, necesario para dar un marco sólido y esclarecedor de nuestro objeto de estudio, por lo que se recurrió a fuentes de información como de bibliotecas virtuales y la misma red Internet. Otro aspecto con el que nos encontramos, fue el asesoramiento centrado en aspectos generales de la metodología científica, siendo necesario recurrir a especialistas de otras instituciones para resolver algunas dudas en la investigación referidas a la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas con recursos informáticos.

El estudio se desarrolló bajo el enfoque cuantitativo considerando el propósito de la investigación que tiene como variable el aprendizaje, la misma que es medida como una escala de razón con calificaciones en una escala cuantitativa, datos que son cuantificables, el diseño aplicado corresponde a los cuasi experimentales denominado como pretest post test con grupo de control, sometiéndose al grupo de experimentación al procesos de enseñanza aprendizaje utilizando GeoGebra como recurso educativo y al grupo de control sin utilizar GeoGebra para determinar las diferencias en sus aprendizajes antes y después de la experimentación mediante una prueba objetiva.

El estudio comprendió como población los 150 estudiantes del 5to año de estudios, matriculados y asistentes al año escolar 2018 en la Institución Educativa N° 1228 “Leoncio Prado” de Ate. Trabajándose con una muestra no probabilística de 56 estudiantes formados en grupos íntegros naturales, donde el grupo experimental (5to “A”) y de control (5to “B”) comprendió 28 estudiantes cada una.

El informe se estructuró en cinco capítulos, presentándose los contenidos organizados de la siguiente forma:

Capítulo I. Marco teórico, organiza el cuerpo de conocimientos sobre el objeto de la investigación, los antecedentes nacionales e internacionales, bases teóricas sobre

GeoGebra, enseñanza aprendizaje de las matemáticas, sistemas de ecuaciones lineales y la definición de términos.

Capítulo II. Hipótesis y Variables, se presenta la hipótesis y las variables de la investigación; así como la operacionalización de las variables.

Capítulo III. Metodología de la investigación, describe el diseño metodológico y muestral de la investigación, las técnicas de recolección de datos, técnicas para el procesamiento de la información, además de los aspectos éticos considerados.

Capítulo IV. Resultados. Presento los resultados arribados en la investigación en la experimentación, organizados de acuerdo a los objetivos y variables de estudio.

Capítulo V. Discusión, destaca los resultados encontrados frente a estudios anteriores fundamentando los hallazgos de la investigación.

Asimismo, se exponen las conclusiones arribadas, recomendaciones, fuentes de información y los anexos con documentos empleados.

## **CAPÍTULO I: MARCO TEÓRICO**

### **1.1 Antecedentes de la investigación**

Lázaro y Quichca (2018) realizaron la investigación: Enfoque de Parzysz Sobre los Niveles de Pensamiento Geométrico y Software GeoGebra en Estudiantes del 2° Grado Secundaria, Huancavelica, presentado en la Universidad Nacional de Huancavelica. La investigación tuvo como propósito “analizar el desarrollo del pensamiento geométrico de Parzysz al estudiar los poliedros regulares convexos con material concreto y GeoGebra en estudiantes del 2do. grado de la I.E. “Velasco Pucapampa”, distrito de Ccochaccasa provincia de Angaraes, Huancavelica”. Investigación aplicada dentro del nivel descriptivo desarrollado con un diseño preexperimental trabajando con 22 estudiantes. Los resultados muestran que el promedio muestra un valor de 8,59 puntos de la escala. Por otro lado, si comparamos estos promedios, se determina los resultados del post test supera en 7.77 puntos de la escala al promedio alcanzado en el pre test 16,36; es decir, inicialmente los estudiantes presentaron dificultades en la percepción de los poliedros, concluyendo que las actividades con material concreto y el uso del software GeoGebra nos permiten afirmar que es importante usar primero el material concreto en los estudiantes del 2do. grado de la I.E. “Velasco Pucapampa” del distrito de Ccochaccasa provincia de Angaraes, Huancavelica, así como el uso pertinente de las herramientas del GeoGebra en 3D permitieron el desarrollo de la percepción es decir, ir entendiendo y percibiendo los poliedros de forma dinámica con material concreto y el uso de la tecnología.

Bermeo (2017), desarrolló la investigación: Influencia del Software GeoGebra en el aprendizaje de graficar funciones reales en estudiantes del primer ciclo de la Universidad Nacional de Ingeniería – 2016. En la Universidad César Vallejo. La investigación fue de tipo aplicada, desarrollada aplicando el método hipotético deductivo con un diseño preexperimental preprueba - posprueba con una sola medición. Trabajó con 127 estudiantes del I semestre de la Facultad de Ingeniería Industrial y de Sistemas. Los resultados muestran que la puntuación obtenida en la preprueba un 37.8% se hallan en proceso, el 62.2% se ubica en el nivel en logro, posterior a la aplicación GeoGebra para el aprendizaje de la gráfica de funciones, un 9.4% se ubica en proceso, mientras que un 90.6% se ubican en el nivel en logro. Concluyendo que la diferencia de los rangos del post test menos el pre test después de la aplicación del software GeoGebra en el aprendizaje de graficar funciones reales en 26 estudiantes no mostró diferencia en cuanto a la puntuación de pre y post test, sin embargo, a 95 estudiantes surgió el efecto de la aplicación del software y en 6 estudiantes la puntuación del pre es igual a la del post test. Para la contratación de la hipótesis se asumió el estadístico de Wilcoxon, frente al resultado de tiene  $Z_c < Z_t$  ( $-6.305 < -1,96$ ) con tendencia de cola izquierda, lo que significa rechazar la hipótesis nula, así mismo  $p < 0,05$ ) confirmando la decisión, la aplicación del software GeoGebra influye significativamente en el aprendizaje de graficar funciones reales en estudiantes del primer ciclo de la facultad de ingeniería industrial, UNI. Lima – 2016.

Contreras (2017), realizó la tesis: Aplicación de GeoGebra para mejorar el aprendizaje de transformaciones en el plano de los estudiantes del nivel secundario – Lima, 2017, para obtener el grado de maestra en educación. La tesis pretende “demostrar que la aplicación de GeoGebra permite mejorar el nivel de aprendizaje en transformaciones en el plano por parte de estudiantes del nivel de educación secundaria”, investigación a nivel aplicado desarrollado aplicando el diseño experimental con una población muestral de 40 estudiantes distribuidos en grupos de control y experimentación, administrándoles una encuesta y un examen de transformaciones en un plano. Concluye que, “los estudiantes incrementaron significativamente el nivel de aprendizaje de transformaciones en el plano por la aplicación de GeoGebra”.

## **1.2 Bases teóricas**

### **1.2.1 Software GeoGebra**

Contreras (2017) señala las perspectivas de Carrillo (2011) para reconocer que el uso de las TIC, como lo es GeoGebra requiere una instrucción de la docente previa a la enseñanza, tal vez en algún curso de formación que ayude a que pueda trabajarlo con sus estudiantes.

Por lo que se sugiere, que “la formación técnica es indispensable, en la justa medida para comenzar en el uso de GeoGebra, así como de otro recurso que pudiera ser utilizado. Se trata de no iniciar improvisando, sino de familiarizarse en el uso del software de manera gradual. Esta propuesta, no deja de lado las otras actividades disponibles en Internet, y que contribuyen al uso de la tecnología, más por el contrario, el saber que están en el medio, y que son accesibles para ser utilizadas en el momento que uno decida. Por lo que debemos tener presente que no se trata de proponer actividades que se inicien con excesivos requisitos o contenidos previos entre los cuales podemos señalar a comandos o instrucciones, porque los estudiantes se dedicarán mucho tiempo y esfuerzo a la parte técnica y tendremos, por lo tanto, que la propuesta de aprendizaje con el software y contenidos planteados será menos de lo esperado”. (p. 6)

Es necesaria, entonces la formación técnica, pero ésta no debe exceder a la formación pedagógica, indispensable para la conducción de los procesos didácticos.

GeoGebra es un software dinámico accesible, para introducir datos algebraicos y observar en la pantalla los gráficos que se generan al introducir un sistema de ecuaciones.

Bermeo (2017, como se citó en Bello, 2013) GeoGebra, es un software libre dinámico, utilizándose en el nivel inicial, primaria, secundaria y superior, dirigido a docentes y también estudiantes; creado por Markus y Judith Hohenwarter, en la Universidad de Salzburgo (2001) consolidándose en la Universidad de Atlantic, Florida de los Estados Unidos.

GeoGebra se caracteriza por ser interactivo, permitiendo el fácil acceso de datos y

visualización de resultados, permite efectuar construcciones de geometría, álgebra y cálculo, con todos sus elementos, los cuales, se podrán ir modificando dinámicamente, de acuerdo a la variación de datos que se ingresen.

Hohenwarter (2009), (2016, como se citó en De La Cruz), afirma GeoGebra como un software interactivo de matemáticas que combina de forma dinámica la geometría, el álgebra y el cálculo. Fue desarrollado, para facilitar la enseñanza de las matemáticas. Comprende tres partes diferentes de cada objeto matemático: La ventana gráfica permite mostrar los gráficos de las funciones, ventana algebraica las ecuaciones, coordenadas y la ventana de la hoja de cálculo los datos. Un aspecto interesante la representación del objeto, es la vinculación dinámica a las otras representaciones adaptándose automáticamente y de forma recíproca, asimilando los cambios producidos en cualquiera de ellas, sin limitación de señalar cuál fue la primera representación creada primero. Por ello que el uso del software GeoGebra, posibilita en los estudiantes desarrollar de la mejor forma el pensamiento espacial.

Podemos señalar que, actualmente con el potencial educativo de este software, muchos docentes partiendo del interés de su creador, continúan enriqueciéndolo a través de la red de Institutos GeoGebra Internacionales (IGI), que operan como soporte educativo, donde docentes e investigadores trabajan de manera conjunta para promover una buena práctica docente, así como el aprendizaje de las matemáticas.

Asimismo, para Castellanos (2010) los estudiantes que trabajan con el GeoGebra, interactúan dinámicamente, efectuando: Construcciones en forma precisa y en un breve tiempo con los dispositivos de este software en el álgebra. Pueden también, efectuar razonamientos y comprensión acerca de las relaciones entre diferentes objetos. Asimismo, disponen del control de la parte gráfica de una figura, usando de manera sencilla el mouse. También, manipulan libremente las figuras geométricas y posibilitan observar las semejanzas y diferencias de los gráficos. Pueden también, reintentar la construcción de las actividades en GeoGebra las veces que lo requieran, permitiéndoles ver los procesos que siguieron para alcanzar resultados, con la finalidad de ver los procesos

que se dieron para llegar a un resultado final. Elaborar argumentos de las construcciones realizadas. Finalmente, si lo desean pueden efectuar la impresión de sus construcciones.

De todo lo mencionado, podemos concluir, que GeoGebra es un software matemático, dinámico e interactivo que tiene aplicación educativa en sus diferentes niveles. En el nivel secundario, el GeoGebra facilita el estudio de las competencias de forma y localización, así como de la competencia de forma, regularidad y cambio.

### **Características de GeoGebra**

Si es así es según Bermeo (2013) podemos resaltar señalar las siguientes características: (1). Es un software que se puede descargar libre de costos para la aplicación en matemática. (2). Es un software que para el desarrollo de la geometría es dinámica, facilitando la enseñanza y el aprendizaje de *diversas* ramas como Álgebra, Aritmética, Probabilidad y Estadística. (3). Es un software que puede ser descargado para su uso en un USB por los estudiantes. (4). El software GeoGebra puede ser ejecutado en Windows y otros sistemas operativos como el Linux. (5). La pantalla que presenta el monitor para el trabajo con el GeoGebra presenta ventanas o vistas distribuidas en una ventana algebraica ubicada a la izquierda de la pantalla y a la derecha tenemos a la ventana gráfica, y en la parte inferior observamos la ventana de entrada.

GeoGebra es un software gratuito, que podemos obtenerlo a través del internet en sus diferentes versiones.

Además, es necesario, resaltar la importancia del GeoGebra según Bermeo (2017) al señalar que: El uso del GeoGebra en la enseñanza de la programación lineal, facilita a los estudiantes para obtener de manera interactiva la región factible, también haciendo uso del cambio de datos con el zoom de GeoGebra, obtienen gráficos y datos precisos, no distorsionados de un problema al resolver sistemas de inecuaciones lineales con dos variables. El empleo del software GeoGebra facilita la visualización de objetos matemáticos y sus conexiones entre la ventana gráfica con la ventana algebraica, a través de la manipulación de objetos usando la ventana de entrada del GeoGebra, se logra la

comprensión de conceptos matemáticos, disminuyendo su memorización. (p.23)

Mediante el GeoGebra el estudiante puede plantear algebraicamente los sistemas de ecuaciones lineales, escribir las ecuaciones en la parte inferior de la ventana, y de manera simultánea observar la representación gráfica. Esto le permite identificar el tipo de sistema de ecuación lineal, determinar el punto de intersección de los ejes de ambas ecuaciones, es decir observar el conjunto de la solución, simplemente identificando en la gráfica las coordenadas que presenta inmediatamente el conjunto solución.

### **Fundamentos teóricos de GeoGebra**

De acuerdo a Contreras (2017) el empleo de los recursos educativos que son libres de costo, accesibles, específicamente el GeoGebra en los procesos de aprendizaje se encuentra sustentado en algunas de las bases del constructivismo y del aprendizaje significativo.

El constructivismo, según Ordóñez (2004), podría observarse como un “conjunto de nociones acerca del aprendizaje y en donde el sujeto que aprende es responsable de su aprendizaje, donde el docente asume el rol de mediador en el proceso de construcción del conocimiento”.

Según esta perspectiva se puede señalar lo siguiente: el estudiante es quien se responsabiliza de su propio aprendizaje; las actividades mentales están enfocadas al desarrollo de funciones cognitivas; el rol del docente se reduce a la mediación del proceso de aprender, considerando para ello, diversas estrategias didácticas para la recuperación de conocimiento previos a fin de construir el nuevo aprendizaje; los recursos didácticos fortalecen las funciones cognitivas y mejoran el aprendizaje. Al respecto, Castillo (2008) señala que “lo notable del modelo constructivista reside en que el verdadero artista en la construcción del conocimiento no es el docente ni la computadora, sino el estudiante” (p. 179), de ahí la importancia de implementar recursos en el aula. El aprendizaje significativo explica de manera directa la relación entre el uso de estos recursos y el aprendizaje.

Ausubel (2002) propone que el estudiante, para lograr aprender, tiene que reestructurar de sus pensamientos, conocimientos, representaciones mentales y conceptos:



“Aprender significa entender, el aprendizaje está reducidamente vinculado a la relación existente entre el nuevo conocimiento y los que ya tiene el estudiante” (Carretero, 2009, p. 27). Entonces podemos señalar que el aprendizaje se convierte en significativo cuando los últimos conocimientos que reciben pasan a formar parte de la estructura mental del estudiante, la tarea educativa se concentra en facilitar el acceso al conocimiento dejando desplazado conocimiento anterior.

Según Ausubel (2002), de todo lo anterior, además, el estudiante debe estar predispuesto a aprender y tener contacto con recursos y materiales potencialmente significativos, lo que significa que estos deben estar ordenados y tengan cierta coherencia lógica, y suficientes anclajes como para activar conflicto cognitivo. La incorporación del software educativo implica, entonces, reconocer que representa un recurso didáctico que permite relacionar conocimientos previos del estudiante con los nuevos y facilitar su incorporación en la estructura cognitiva del estudiante. Contreras, C. (2017).

Bajo esta perspectiva, el docente y GeoGebra son mediadores del aprendizaje y para el propósito de esta tesis mediadores del aprendizaje de los métodos de solución para un sistema de ecuaciones. Sin embargo, para constituirse en estrategia didáctica se requiere de un modelo que explique el modo en que este conocimiento se logrará adquirir, siendo la propuesta didáctica de Brousseau la que tiene mayor adecuación al propósito de esta investigación y presenta evidencia teórica.

## **1.2.2 Enseñanza aprendizaje de las matemáticas.**

### **Dificultades en el aprendizaje de las ecuaciones**

Los estudiantes generalmente presentan situaciones de errores en los siguientes aspectos:

- En la ecuación cuando un número multiplica a la incógnita en uno de los miembros de la ecuación, este número pasa a restar al otro miembro.

Este error se podría dar debido a que no identifican el inverso aditivo respecto al inverso multiplicativo.

$$5x + 2 = 0$$

$$x = -2 - 5$$

- Realizan el cambio del signo en un término de la ecuación sin efectuar el mismo cambio en el otro miembro. En este caso el estudiante, es probable que piense que, cuando se realiza el traslado aditivo o multiplicativo, se tiene que cambiar el signo en alguna parte de la ecuación (como el ejemplo anterior), o que pueden cambiar el signo en el término que decide trasladar a otro miembro. Veamos:

$$-3x + 4 = 2$$

$$3x = 2 - 4$$

- Efectúan la transposición de términos (ya sean sumandos o factores) de manera incorrecta. Probablemente, el estudiante le da importancia al orden en el que deberían efectuarse las transposiciones, tal vez supone que el orden y las operaciones establecidas en la ecuación, no son relevantes, y se pueden dar en cualquier orden, luego suponen también que el resultado no se modificará.

$$\begin{array}{r} 8x + 6 = 5 \\ \hline 5 \\ 8x + 6 = 25 \end{array}$$

- Cuando resuelven una ecuación suman o restan un término solo en un miembro de la ecuación, sin efectuar esa suma o resta en el otro miembro.

$$4x + 6 = 10$$

$$4x + 6 - 6 = 10$$

- Al presentarse un producto, inician el desarrollo aplicando la propiedad distributiva, de manera incorrecta.

$$4(x+10) = 12$$

$$x + 40 = 12$$

- Al tener una ecuación con un producto indicado realizan las operaciones de sustracción, adición o multiplicación en alguno de los miembros de la ecuación, de forma deficiente.

$$2(-3x + 1) = 4$$

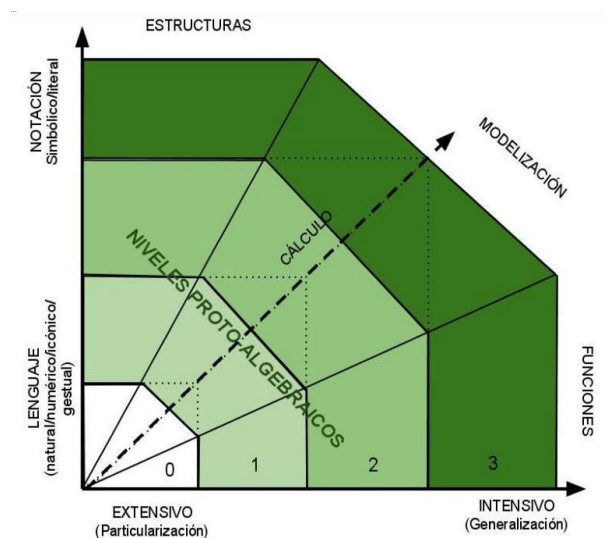
$$6x + 2 = 4$$

### Niveles de algebrización

El algebra incluye el estudio de las ecuaciones y ésta consiste en representar mediante letras una expresión verbal. Los niveles de este proceso de expresar un problema y resolverlo empleando expresiones algebraicas es lo que investigaron y presentaron Godino, Aké, Gonzato y Wihelmi (2014) y propusieron un modelo para caracterizar el razonamiento algebraico elemental. Estableciendo cuatro niveles de algebrización considerándose los objetos y procesos intervinientes en la actividad matemática.

**Figura 1.**

Tomado de los “Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar.



Implicaciones para la formación de maestros”, por J. D. Godino et al., 2014, Enseñanza de las Ciencias, 32,1, p. 17. Recuperado de <http://www.ugr.es/>

- a. Nivel 0 de algebrización.** Se denomina así, porque el pensamiento algebraico está ausente en el desarrollo efectuado por el alumno. Godino et al. (2014) propusieron una regla para describir una actividad matemática de nivel 0. Presentamos como ejemplo, de este nivel el siguiente problema: Fernando tiene 6 figuritas más que Dalton. Ambos niños tienen 22 figuritas. ¿Cuántas figuritas tiene Fernando? Un estudiante podría proponer lo siguiente: Si se sustrae 6 figuritas a Fernando, se tendrá el mismo número de figuritas que Dalton y los dos tendrían  $22 - 6 = 16$  figuritas. Entonces cada uno

tendría 8 figuritas. Del proceso, tenemos que, al sustraerle 6 figuritas a Fernando, en realidad, tiene  $8 + 6 = 14$  figuritas.

Como podemos observar, el estudiante ha resuelto el problema de manera correcta, pero no presenta el desarrollo del pensamiento algebraico; por lo que se le ubica en el nivel 0 de algebrización a la resolución de esta situación.

- b. Nivel 1 de algebrización (nivel incipiente).** Para este nivel presentaremos el siguiente ejemplo: Juan adquiere una naranja, dos duraznos y tres fresas en un puesto de frutas por S/. 5,00. Otro día, en el mismo puesto, compra una naranja y tres fresas por S/. 3, 00. ¿Cuál es el costo de cada durazno? En la resolución del problema, el estudiante puede emplear el siguiente razonamiento: si al precio de una naranja, dos durazno y tres fresas, que es de S/.5,00, le quito el precio de una naranja y tres fresas, que es S/. 3,00, me queda el precio de dos duraznos; es decir,  $5 - 3 = 2$  soles el precio de dos duraznos. Luego, como fueron dos duraznos, cada una tiene el costo de un sol.

Este proceso de desarrollo aplicado corresponde al nivel 1 de algebrización. La resolución comprende la utilización y explicitación de objetos intensivos. Advirtiéndose que el precio de una naranja y tres fresas es de S/. 3,00 y se generaliza para utilizar esa información en otra situación.

- c. Nivel 2 de algebrización (nivel intermedio).** Para este nivel se considera el problema planteado, al inicio en el nivel 0 de algebrización (Fernando tiene 6 figuritas más que Danton. Entre ambos tiene 22 figuritas. ¿Cuántas figuritas tiene Fernando?

El proceso de desarrollo podría ser el siguiente: sea  $x$  la cantidad de figuritas de Fernando; entonces, el número de figuritas de Danton es  $x - 6$ . Luego, ambos tienen  $2x - 6 = 22$ , o bien,  $x = 14$ . Fernando tiene 14 figuritas. Por el procedimiento aplicado en la solución se asigna el nivel 2 de algebrización. La cantidad desconocida es representada mediante una incógnita, en este caso " $x$ " y se plantea la ecuación de la forma  $Ax + B = C$ .

- d. Nivel 3 de algebrización (nivel consolidado).** Se presenta un nivel consolidado, por

ello de (nivel 3) de algebrización, cuando se plantea un término algebraico, representando con una variable la incógnita en el problema propuesto. Veamos el ejemplo presentado en el nivel 0. La propuesta presenta los siguientes pasos: siendo “x” la cantidad de figuritas que tiene Fernando “y” la cantidad de figuritas de Danton. Se plantea las ecuaciones:  $x=y+6$ , y  $x+y=22$ . Sustituyendo la primera ecuación en la segunda, se obtiene  $y+6+y=22$ , de donde se asumen que  $2y=16$ , o,  $y=8$ . Luego sustituimos este valor en la primera ecuación, obteniendo  $x = 14$ . Fernando tiene 14 figuritas.

Como se puede ver, se ha asignado el nivel 3, porque se propuesto una ecuación con variables, trasladando de un miembro a otro, y finalmente reemplazando el valor de una variable en la ecuación para hallar el valor de la segunda variable.

- e. **Nivel 4 de algebrización (uso de parámetros).** Este nivel se presenta cuando un estudiante utiliza, valores para una de las variables (parámetros), las cuales se presentan en las familias de ecuaciones o al definir las funciones. En las funciones, se da cuando se establece la primera relación entre el dominio y el rango de una función. donde también se asigna un dominio y un rango a la función paramétrica, es decir, se da a conocer la función que asigna una ecuación o función específicas a cada valor del parámetro o parámetros.
- f. **Nivel 5 de algebrización (tratamiento de parámetros).** En este nivel el estudiante logra hacer operaciones en expresiones que involucran parámetros. Aquí, se presentan los tipos de literales usados en algebra principalmente (incógnitas, constantes, parámetros y variables), se resuelve un problema y se expresa en ecuaciones. Como ejemplo:  $y^2 + (8 + 4a)x - 2a + 10 = 0$ . En esta ecuación, se hace las veces de parámetro. En un problema su resolución, se argumenta, se puede reconocer por ejemplo una sola solución.
- g. **Nivel 6 de algebrización (estructuras algebraicas).** En este nivel se hacen uso de estructuras algebraicas como espacios vectoriales, grupos, anillos, etc.

## **Procedimientos de enseñanza sugeridos para el desarrollo de aprendizajes con el álgebra**

Eraza (2011) expone las fases en el desarrollo de los aprendizajes vinculados con el desarrollo del álgebra.

**a. Fase real.** Esta es la fase, que busca que el estudiante pueda observar a través de ejemplos o situaciones gráficas el concepto de una ecuación lineal con una incógnita, así como ésta tiene aplicación en situaciones cotidianas, planteadas a través de un problema. Entonces, esta fase se logra mediante representaciones de la realidad (utilización de imágenes, dibujos, etc.) con el propósito de que realice conjeturas el estudiante, argumente su pensamiento matemático, reconozca y describa patrones, y efectúe analogías iniciar la construcción de conceptos.

**b. Fase gráfica.** Posterior al contacto con elementos tangibles, físicos, es necesario que los estudiantes representen gráficamente esta experiencia. El pensamiento abstracto se fortalece cuando los estudiantes son capaces de tomar las imágenes mentales de la realidad y plasmarlas en un papel.

Asimismo, de este modo, se apoya el aprendizaje de los alumnos que presentan diversos modos de asimilación de información, específicamente de forma visual.

**c. Fase Simbólica.** En esta fase deben estar claros los estudiantes en las ideas que representan a una ecuación, las propiedades y características aprendidas en la fase anterior, entonces se realiza su representación con símbolos matemáticos. Se establece en esta fase, la asignación de una variable a la cualidad, característica o dato del problema, sin lugar a dudas, relacionándola con los otros datos de la situación problemática. Y estos objetos matemáticos, pueden expresarse con diferentes representaciones.

### **Didáctica de las matemáticas con GeoGebra**

Durante las clases introduciendo el software GeoGebra, se desarrollan actividades con niveles de razonamiento planteados en la teoría de Brosseau. Nivel I: Acción. En la

primera fase planteamos el problema, los educandos leen y analizan, definen al problema con sus propios términos, identifican los datos, la pregunta principal, y si es posible la resolución solución del problema. Se parten de los saberes previos de los estudiantes. En esta fase se consideran aspectos cognitivos como el dominio de la práctica en la resolución de problemas, ambos se orientan a la solución del problema, siendo necesario resolverlos en condiciones claramente definidas y con recursos limitados.

Nivel II: Formulación. En esta segunda fase los estudiantes deben brindar el plan, en el cual ordena procedimientos, estrategias y recursos. Los alumnos utilizan lenguajes muy variados, pudiendo ser oral, escrito, gráfico, matemático.

Nivel III: Validación. Esta fase comprende la verificación de los productos y resultados de parte de los estudiantes, sin la necesidad de pedir la participación y opinión final del docente. Los productos de los procesos son puestos a pruebas por sus pares en un proceso metacognitivo que se va a cerrar en el siguiente nivel.

Nivel IV: Institucionalización. En la presente fase el saber alcanzado por el estudiante se sale de lo específico trabajado, descontextualiza y se desprende de uno, para ubicarse en un nivel superior, distinguido y que puede ser utilizado como referente para solucionar otras situaciones o tareas. En esta fase el estudiante logra expresar sus ideas de manera adecuada con el uso de un lenguaje matemático, logrando realizar abstracciones, formalizar conceptos y también lo hace en los procedimientos matemáticos, logrando darle nuevo significado a su aprendizaje en su contexto.

Nivel V: Evaluación. En esta fase final, el estudiante, según los instrumentos que el docente presenta, logra autoevaluarse o que sus compañeros le evalúen como parte del proceso de aprendizaje. Se observa el logro alcanzado del estudiante como: traducir la situación a un lenguaje algebraico, interpreta, realiza representaciones simbólicas, justifica con argumentos matemáticos sus propuestas en equipo, comunicando, socializando sus resultados, si ubica un error en su colega, lo manifiesta y corrige, ayudando a corregir los errores y el modelo intuitivo instalado.

### 1.2.3 Sistema de ecuaciones lineales

Estas presentan en su estructura a ecuaciones lineales que contienen dos incógnitas, generalmente de tipo “x” e “y”, teniendo la siguiente forma:

$$\begin{array}{l} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} a_1, a_2, b_1 \text{ y } b_2 \text{ son los coeficientes;} \\ c_1 \text{ y } c_2 \text{ son los términos independientes.} \end{array} \right.$$



Para formar un sistema, es necesario trabajar con dos ecuaciones, ya que, el número de variables es 2.

### **Clasificación**

- a) Incompatibles: Cuando el sistema no tiene solución.
- b) Compatibles: Cuando el sistema tiene solución, los que se clasifican a su vez en:

Sistema compatible determinado: Cuando presenta solución, pero deben ser únicas y,

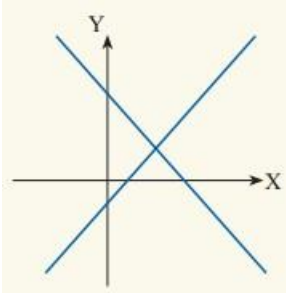
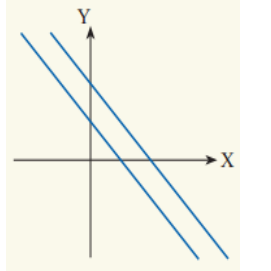
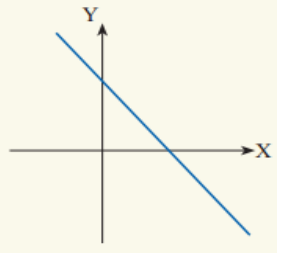
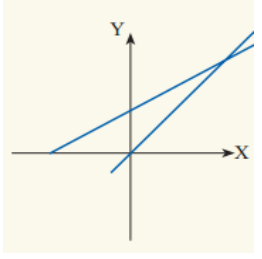
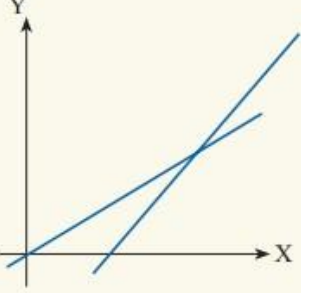
Sistema compatible indeterminado: Si el sistema de ecuaciones presenta soluciones, pero deberán ser infinitas.

La interpretación de la clasificación a través de la gráfica se hace evidente, posibilitando ilustrar la recta en cada ecuación lineal, de forma tal:

- Si el sistema es incompatible (no tiene solución), por lo tanto, la gráfica presenta dos rectas paralelas (no presentan ningún punto en común).
- Si es un sistema compatible determinado (tiene una solución única), las rectas se intersecan, siendo estas secantes (cortándose en un sólo punto).
- Si es un sistema compatible indeterminado (tiene infinitas soluciones), se observa en el gráfico que ambas rectas coinciden en una misma recta (por lo que vemos que se cortan en infinitos puntos).
- El conjunto solución, está conformado por los valores que satisfacen la ecuación, es decir que, al reemplazarlos, la igualdad se cumple en ambas ecuaciones. Recordamos que el conjunto solución donde se da este caso es únicamente en el sistema compatible determinado. En el sistema compatible indeterminado el conjunto solución tiene infinitos valores y en el sistema incompatible el conjunto solución es vacío.

**Tabla 1.**

*Diversas representaciones de un sistema de ecuaciones*

OBJETO MATEMÁTICO	REPRESENTACIÓN		
	Registro verbal	Registro algebraico	Registro gráfico
Sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas; la solución es un conjunto unitario.	Si a los lados de una figura rectangular se alargan 2 cm cada lado, el perímetro es 24 cm. Además, se sabe, que la diferencia entre la medida de los lados es de 2cm ¿cuánto miden los lados del rectángulo.	$2(x + 2) + 2(y + 2) = 24$ $2x + 4 + 2y + 4 = 24$ Tenemos: $2x + 2y = 16$ $x - y = 2$	
Sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas; cuando su solución es un conjunto vacío.	Se tienen a dos números cuya suma es 1000 y el doble de dicha suma nos da 700. ¿Cuáles serán esos números?	$\begin{cases} x + y = 1000 \\ 2(x + y) = 700 \end{cases}$	
Sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas; cuando su solución es un conjunto infinito.	La suma de los lados de un triángulo isósceles es 18 centímetros. Si se suma la medida de uno de los lados congruentes a la mitad de la medida del lado no congruente, se obtiene 9. ¿Cuáles son las dimensiones de cada lado del triángulo?	$\begin{cases} 2x + y = 18 \\ x + \frac{1}{2}y = 9 \end{cases}$	
Sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.	El costo de una entrada al cine cuesta el doble del costo para entrar a la discoteca. Además, la entrada al teatro cuesta 5 soles más que la entrada a la discoteca. ¿Cuánto cuestan la entrada al teatro y cuánto a la discoteca?	$\begin{cases} x = 2y \\ x = y + 5 \end{cases}$ $\begin{cases} y = \frac{x}{2} \\ y = x - 5 \end{cases}$	
Sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.	El costo de la entrada al teatro menos el doble del valor de la entrada al cine es cero. Se tiene, que la diferencia entre el costo de la entrada al teatro y el costo de la entrada al cine es 5 soles. ¿Cuánto es el valor de la entrada al teatro y cuánto es el valor de la entrada al cine?	$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ x - y = 5 \end{cases}$	

Fuente: Fascículo 2. Aspectos Metodológicos en el Aprendizaje del Álgebra en Secundaria. Minedu 2007

## Resolución de un sistema de ecuaciones

Es la solución de un sistema de ecuaciones que comprende un conjunto de valores de una variable que convierten las ecuaciones en igualdades, como se observa en el siguiente cuadro:

**Tabla 2.**

*Resolución de un sistema de ecuaciones*

Sistema	Solución	Igualdades
$\begin{cases} 3x - 5y = 1 \\ 4x + 3y = 11 \end{cases}$	$\begin{cases} X = 2; \\ y = 1 \end{cases}$	$\begin{aligned} 3(2) - 5(1) &= 1 \\ 4(2) + 3(1) &= 11 \end{aligned}$
$\begin{cases} 2x - 3y = 12 \\ 4x - y = 7 \end{cases}$	$\begin{cases} X = 3; \\ y = 2 \end{cases}$	$\begin{aligned} 2(3) - 3(2) &= 12 \\ 4(3) - (2) &= 7 \end{aligned}$

### Principios en la solución de ecuaciones

- 1er principio: Mediante este principio a los dos elementos de una ecuación se le puede sumar o restar un mismo número o expresión algebraica, logrando obtener otra ecuación equivalente.
- 2do principio: Por este principio se puede multiplicar o dividir a ambos miembros de una ecuación un mismo número o expresión algebraica, obteniéndose otra ecuación equivalente.

De la aplicación de los principios indicados se deducen las reglas de transposición que se usan para transformar el sistema a su forma "canónica" facilitando de esta manera su desarrollo. Aquí, tenemos un ejemplo que presenta el proceso de un sistema de ecuaciones lineales llevado a su modo canónico:

$$\begin{cases} \frac{x+4}{3} - y = 2 \\ \frac{x-1}{2} + 3y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 4 - 3y = 6 \\ x - 1 + 6y = 10 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\begin{cases} x - 3y = 2 \\ x + 6y = 11 \end{cases}}_{\text{"Forma canónica"}}$$

A continuación, se presenta los métodos más utilizados para la realizar la solución de un sistema de ecuaciones lineales:

**a) Método de sustitución:**

Para desarrollar este método se realiza los siguientes procedimientos:

- 1) Se elige una ecuación y se despeja una de las incógnitas.
- 2) Se toma la segunda ecuación y se sustituye la expresión obtenida en el paso anterior al despejar la incógnita, en esta segunda ecuación.
- 3) Al tener una ecuación de primer grado con una variable la resolvemos y encontramos el valor de la incógnita.
- 4) Para hallar la segunda variable elegimos una de las dos ecuaciones, reemplazamos el valor de la incógnita obtenida en el paso anterior y calculamos la segunda incógnita.

Resolvemos:

$$3x + 2y = 12 \dots\dots(1)$$

$$x - y = -1 \dots\dots(2)$$

La segunda ecuación se despeja "y", obteniendo:  $y = x + 1 \dots(3)$  Luego sustituimos "y" en la primera ecuación del sistema:

$$3x + 2(x+1) = 12$$

$$3x + 2x+2 = 12$$

$$5x = 10$$

$$x = 2$$

Reemplazamos el valor de  $x = 2$ ; en la ecuación (3)

$$y = 2 + 1$$

Se tiene que  $y = 3$

Siendo el conjunto solución: C.S. = {2; 3}

**b) Método de igualación:**

Realizamos los siguientes procedimientos:

1. Elegimos una incógnita para que sea despejada en las dos ecuaciones simultáneamente.
2. Luego, igualamos las expresiones obtenidas en la incógnita despejada, teniendo en este paso una ecuación de primer grado con una sola incógnita.
3. Se resuelve la ecuación obtenida, y se obtiene el valor de una de las incógnitas.
4. Para hallar el valor de la segunda incógnita, se toma una de las ecuaciones y se reemplaza la incógnita obtenida en el paso anterior. Se halla entonces, el valor de la segunda incógnita.

Ejemplo: Resuelve el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{cases} 8x - 2y = 20 \\ 3x + 2y = 13 \end{cases}$$

Despejamos "y" en cada ecuación:

$$\begin{cases} y = \frac{8x - 20}{2} \\ y = \frac{13 - 3x}{2} \end{cases}$$

Igualamos las segundas partes, obtenemos:

$$\frac{8x - 20}{2} = \frac{13 - 3x}{2}$$

Simplificando denominadores, tenemos:

$$8x - 20 = 13 - 3x ; \text{ trasponemos términos}$$

$$8x + 3x = 13 + 20$$

$$11x = 33$$

$$x = 3$$

Reemplazamos el valor de  $x = 3$ ; en la primera ecuación del sistema:

$$8x - 2y = 20$$

$$\text{Obteniéndose: } 8(3) - 2y = 20 \rightarrow 24 - 2y = 20$$

$$4 = 2y$$

$$y = 2$$

Siendo el conjunto solución el siguiente: C.S. = 3; 2

c) Método de reducción:

Este método consiste en conseguir, multiplicando por números convenientes, que una misma incógnita tenga coeficientes opuestos en ambas ecuaciones.

Comprende los siguientes procedimientos:

- 1) Alistamos las dos ecuaciones, (pudiéndose multiplicar por los números respectivos), de forma que las incógnitas que buscamos eliminar tengan coeficientes opuestos.
- 2) Sumamos las ecuaciones para "eliminar" la incógnita, lográndose tener una ecuación con una sólo incógnita.
- 3) Realizamos la resolución de la ecuación.
- 4) Se sustituye en cualquiera de las dos ecuaciones iniciales el valor obtenido de la incógnita y se despeja la otra incógnita.

Ejemplo:

Halla el conjunto solución del sistema:

$$3x - 2y = 26 \dots\dots\dots(1)$$

$$5x + 4y = 14 \dots\dots\dots(2)$$

Elegimos la incógnita que vamos a eliminar, por ejemplo "y". Multiplicamos la ecuación (1) por 2 y sumamos las ecuaciones resultantes:

$$3x - 2y = 26 \dots\dots\dots(x 2)$$

$$5x + 4y = 14$$

Luego, sumamos:

$$6x - 4y = 52$$

$$\begin{array}{r} \hline 5x + 4y = 14 \end{array}$$

$$11x \quad / \quad = 66 \quad \rightarrow \quad x = 6$$

Para calcular el valor de "y", sustituimos el valor de "x" en una de las ecuaciones. Por ejemplo, en la segunda:

$$5x + 4y = 14 \quad \rightarrow \quad 5(6) + 4y = 14 \quad \rightarrow \quad 4y = -16 \quad \rightarrow \quad y = -4$$

Comprobamos la solución reemplazando los valores de x e y:

$$x - 4y = 52 \quad \rightarrow \quad 3(6) - 2(-4) = 26 \quad \rightarrow \quad 18 + 8 = 26 \quad \rightarrow \quad 26 = 26$$

$$5x + 4 = 14 \quad \rightarrow \quad 5(6) + 4(-4) = 14 \quad \rightarrow \quad 30 - 16 = 14 \quad \rightarrow \quad 14 = 14$$

El Conjunto Solución es: 6; -4

#### 1.2.4 Competencias y capacidades en matemáticas

Lo cita el autor Minedu (2017, p. 21), el Currículo Nacional de Educación Básica Regular plantea los conceptos más relevantes que permiten que las labores en el aula se puedan concretar en una buena práctica educativa. Las competencias y capacidades permiten comprender a dónde se debe llegar, cuáles son las intenciones expresadas en el perfil de egreso.

##### a. Competencias

Se define como el potencial que poseen las personas para emplear y combinar diversas capacidades con el propósito de concretar una actuación en una situación determinada, de forma adecuada, correcta y el marco de los valores.

Demostrar la competencia implica la comprensión de la situación a ser resuelta, evaluando las diversas perspectivas para afrontar la solución. Lo cual implica haber logrado la identificación de los conocimientos y las habilidades necesarias, integrándolos de forma pertinente para afrontar la situación de acuerdo al propósito, tomando decisiones para ponerlos en acción de forma pertinente.

De otro lado, ser competente es saber combinar y poner en práctica las habilidades interpersonales con las habilidades socioemocionales de modo que pueda haber una interrelación entre pares más efectiva. Esto exige a los sujetos estar atentos, sobre los aspectos subjetivos, valores y emociones personales y la de otras personas, considerando que estas tendrán incidencia en la evaluación y la determinación de las alternativas adecuadas para

ponerlas en acción.



El desarrollo de las competencias en los estudiantes, se realiza mediante un proceso de construcción permanente, de forma intencional y consiente, los que son propuestos por los docentes para su construcción en el contexto educativo. El proceso de construcción de las competencias es continuo durante la vida, y se presentan de forma organizada y sistematizada en niveles y etapas de la educación básica regular.

Las competencias en la educación básica, como se indicó líneas arriba se desarrollan durante toda la etapa escolar para lograr el perfil de egreso. Dichas competencias se vinculan unas con otras, de manera simultánea y sostenida durante la experiencia educativa. Las que se combinan con otras y extienden a lo largo de la vida escolar, según expresa el Currículo Nacional de la Educación Básica (Minedu, 2017).

**b. Capacidades**

Las capacidades están definidas como recursos para realizar actuaciones de forma competente, comprendiendo los conocimientos, habilidades y actitudes que los estudiantes movilizan y aplican en la solución requerida, enfrentar situaciones. Las capacidades señaladas son menos complicadas que las competencias, las cuales conllevan operaciones o procesos más complejos. En lo que respecta a los conocimientos, estas comprenden la comprensión de las teorías, conceptos y procedimientos existentes en los diferentes campos del saber. La educación utiliza en la formación los conocimientos descubiertos, procesados, contruidos y validados por la sociedad y su entorno sociocultural. Del mismo modo, los estudiantes logran construir conocimientos. De lo que podemos concluir, que el aprendizaje es un proceso de construcción activo y continuo del conocimiento, y no la repetición y memorización de los conocimientos existentes.

## **Área de matemática**

El desarrollo de una cultura y de la humanidad a través de la Historia se ha logrado gracias a la matemática, que es una actividad humana, muy importante. No es estática, su avance es permanente, así como sus alcances, en ella se basan las diversas investigaciones científicas y la tecnología moderna, las que contribuyen al desarrollo integral de la sociedad.

Por ello, el aprendizaje de las matemáticas favorece la formación de ciudadanos con la capacidad de indagar, organizar, sistematizar y analizar información de su entorno para entenderla o interpretarla, para actuar en ella, tomando determinaciones correctas o las más adecuadas. Les permite, además, resolver problemas en diversas situaciones de contexto, aplicando diversas estrategias y conocimientos matemáticos de manera flexible.

Para lograr que los estudiantes al término de la Educación Básica Regular alcancen el perfil de egreso, se proponen la construcción de diferentes competencias. La importancia del área de matemática radica en su contribución al desarrollo de las competencias mediante la aplicación del enfoque centrado en la resolución de problemas, considerando el desarrollo de las siguientes competencias en los estudiantes, lo cita el autor (Minedu, 2015):

- “Resuelve problemas de cantidad”.
- “Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambios”.
- “Resuelve problemas de forma, movimiento y localización”.
- “Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre”.

**Enfoque para el desarrollo de las competencias en el área de Matemática.** En el área de Matemática, los procesos de enseñanza y el aprendizaje, los fundamentos teóricos y metodológicos presenta las siguientes características:

- Las matemáticas son un producto dinámico cultural, que se encuentra en constante desarrollo y ajuste.
- La actividad matemática se enfoca a la resolución de problemas sobre

situaciones de su contexto diverso. Estas situaciones comprenden los siguientes grupos: “situaciones de cantidad; situaciones de regularidad, equivalencia y cambio; situaciones de forma, movimiento y localización; y situaciones de gestión de datos e incertidumbre”

- El planteamiento y resolución de problemas enfrenta a retos a los estudiantes al desconocer las estrategias para su solución. Lo que le permite desarrollar su capacidad de indagación y reflexión en la búsqueda de la solución del problema en su entorno social. Proceso de construcción y reconstrucción de conocimientos que realiza el estudiante al relacionar, y reorganizar ideas y conceptos matemáticos que surgen como solución a los problemas planteados, en la medida que incrementan en grado de complejidad.
- La resolución de los problemas debe considerar el planteamiento de situaciones por los estudiantes y la promoción por el docente de la creatividad e interpretación de las situaciones.
- Los aprendizajes son impulsados por las creencias, emociones y actitudes de los estudiantes.
- La autorregulación del proceso de aprendizaje posibilita el aprendizaje en los estudiantes, asumiendo sus errores, aciertos, dificultades y avances en el proceso de resolución de los problemas.

### **1.2.5 Aplicación de las TIC en el Currículo Nacional.**

El Currículo Nacional considera la competencia 28 “Se desenvuelve en entornos virtuales generados por las TIC” (Minedu, 2016), que debe desarrollarse de forma transversal, por lo que todos los docentes están obligados a ver el cumplimiento y desarrollo, así como la evaluación formativa de esta competencia transversal. La que se debe presentar con una calificación en cada bimestre o trimestre.

Se inserta esta competencia en el marco de la Ley General de Educación N° 28044,

que considera como uno de los objetivos de la Educación Básica el desarrollo de aprendizajes que “permitan al educando un buen uso y usufructo de las nuevas tecnologías” (artículo 31, inciso c). Además, el Proyecto Educativo Nacional plantea que el aprovechamiento de las tecnologías posibilitará “optimizar los aprendizajes” y “haga más efectivo el trabajo pedagógico en el aula” al hacer de forma “eficaz, creativa y culturalmente pertinente”. Las TIC posibilitan innovar los procesos de enseñanza y el aprendizaje, adaptándose a los cambios sociales y culturales que demanda el desarrollo social.

En el Currículo Nacional, para el 2019 presenta las competencias transversales, que deben ser consideradas por los docentes en su programación para que los estudiantes lo desarrollen a través de diversas situaciones didácticas, significativas coherentes entre las diversas áreas curriculares propuestas para el grado de estudio.

Todas las competencias propuestas en el Currículo nacional, proponen una evaluación formativa. Cada docente deberá tomar en cuenta estos alcances para todos los grados. Para ello, es necesario que los docentes concuerden la priorización de los aprendizajes que deben lograr en el año escolar, desde las áreas curriculares, unidades de aprendizaje que deben desarrollar.

### **1.3 Definición de términos básicos**

**Software educativo.** Cataldi (2000, como lo citado en Silva y Oteiza 2001), lo definen como: Son los programas de computación realizados con la finalidad de ser utilizados como facilitadores del proceso de enseñanza- aprendizaje, con algunas características particulares tales como: la facilidad de uso, la interactividad y la posibilidad de personalización de la velocidad de los aprendizajes.

**GeoGebra.** Hernández (2014, como citó en Lazaro y Quichca, 2018) afirma que GeoGebra como un “programa dinámico para el desarrollo del proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas”. Integra módulos de geometría, algebra y estadística, ofreciendo representaciones gráficas de los objetos en formas múltiples como: gráficos algebraicos, gráficos estadísticos vinculados a hojas de datos que favorecen el aprendizaje.

**Competencias matemáticas.** Una “competencia se define como la facultad que tiene una persona de combinar un conjunto de capacidades, movilizándolo diversos recursos cognitivos para hacer frente a un tipo de situaciones” (Perrenoud, 2000), mostrando su capacidad para trasladar los aprendizajes en la resolución de problemas de su entorno.

**Matemáticas.** Considerado como una ciencia de carácter deductivo que estudia las características y propiedades de aspectos abstractos y de las relaciones entre ellos. Para su estudio utiliza números, signos, símbolos, líneas, figuras geométricas, etc. Partiendo de lo más elemental, como son los axiomas y con la aplicación de razonamientos lógicos, se analizan, organizan y elaboran estructuras más complejas, establecen magnitudes y vínculos de los entes abstractos. Mediante este proceso de razonamiento y cálculo, se infieren algunos patrones, se pueden formular conjeturas y dar definiciones a las que se llegan por deducción. (Clapham, 2008)

**Álgebra.** Área de las matemáticas que aplica números, letras y signos para referenciar diversas operaciones aritméticas. Su campo comprende el estudio de las relaciones numéricas, estructuras y manejo de cantidades para la realización de operaciones aritméticas, el análisis y desarrollo de ecuaciones. **Representación gráfica.** Es una forma de representar los datos, pueden ser numéricos o algebraicos empleando recursos gráficos (líneas, vectores, superficies o símbolos), permite expresar visualmente la relación estadística entre ellos o la relación matemática. Se denomina, asimismo, representación gráfica al conjunto de puntos en el plano cartesiano, que describen el comportamiento de un conjunto de datos.

**TIC.** Según el Consejo Nacional de Ciencia, Tecnología e Innovación Tecnológica (CONCYTEC), considera las Tics como las herramientas, soportes y canales que permiten el acceso y tratamiento de la información permitiendo procesar, registrar, almacenar y difusión. Constituyéndose en elementos imprescindibles para el acceso a la información por su copiosísima, variedad y vistosa acumulación de datos que son actualizados

constantemente y se encuentra generalizado en todo el mundo y de todo el mundo.  
(CONCYTEC, 2005),

**Sistema de ecuaciones.** Son “varias ecuaciones que presentan más de una incógnita. Las ecuaciones presentan incógnitas” en muchos casos, pero no en todos los casos necesariamente, por lo cual las ecuaciones relacionan las incógnitas entre sí. (matesfacil.com)

**Métodos de solución de problemas de sistema de ecuaciones.** Comprende “diversas formas de resolución de un sistema de ecuaciones lineales, encontrando todas las soluciones”. Entre ellas tenemos los métodos de reducción, sustitución e igualación. (Santillana, 2016).

**Método de reducción.** Método algebraico consiste en efectuar “opuestos los coeficientes de una de las incógnitas y sumar las ecuaciones para obtener una ecuación de una incógnita”. (Santillana, 2016).

**Método de sustitución.** Este método “consiste en despejar una incógnita en una de las ecuaciones y sustituir esta expresión en la otra ecuación”. (Santillana, 2016).

**Método de igualación.** Este método “consiste en despejar la misma incógnita en ambas ecuaciones e igualar las expresiones obtenidas”. (Santillana, 2016).

## **CAPÍTULO II: HIPÓTESIS Y VARIABLES**

### **2.1 Formulación de hipótesis principal y derivadas**

#### **2.1.1 Hipótesis general**

El empleo de GeoGebra favorece significativamente la comprensión de los métodos de solución de problemas de sistemas de ecuaciones lineales en los estudiantes del 5º grado del nivel secundario en la I.E. N° 1228 “Leoncio Prado” de Ate, Lima, 2018

#### **2.1.2 Hipótesis derivadas**

- 1) El empleo del GeoGebra favorece significativamente la comprensión del método de reducción en la solución de sistemas de ecuaciones lineales en los estudiantes del 5º grado del nivel secundario en la I.E. N° 1228 “Leoncio Prado” de Ate, Lima, 2018.
- 2) El empleo del GeoGebra favorece significativamente en la comprensión del método de sustitución en la solución de sistemas de ecuaciones lineales en los estudiantes del 5º grado del nivel secundario de la I.E. N° 1228 “Leoncio Prado” de Ate, Lima, 2018
- 3) El empleo del GeoGebra favorece significativamente en la comprensión del método de igualación en la solución de sistemas de ecuaciones lineales en los estudiantes del 5º grado del nivel secundario de la I.E. N° 1228 “Leoncio Prado” de Ate, Lima, 2018.

#### **2.1.3 Variables y definición operacional**

**Variable independiente (X):** Aplicación del GeoGebra, comprende el empleo del



software como recurso informático para apoyar las actividades de enseñanza aprendizaje como recurso educativo.

**Variable dependiente (Y):** Métodos de solución de problemas, comprende la utilización de los métodos para solucionar problemas de sistemas de ecuaciones lineales. Corresponde los aprendizajes mostrados por las estudiantes como producto del empleo de GeoGebra al resolver casos propuestos en las sesiones de aprendizaje.

**Tabla 3.**

Variable independiente (X): Aplicación del GeoGebra

GRUPO EXPERIMENTAL				GRUPO DE CONTROL			
VARIABLE	ETAPAS	PASOS	INSTRUMENTO DE CONTROL	VARIABLE	ETAPAS	PASOS	INSTRUMENTO DE CONTROL
CON APLICACIÓN DEL GEOGEBRA	A. PRUEBA DE ENTRADA	1. Aplicación del pre- test a cada estudiante	Lista de Cotejo  Registro de Calificaciones	SIN APLICACIÓN DEL GEOGEBRA	A. PRUEBA DE ENTRADA	1. Aplicación del pre- test a cada estudiante	Lista de Cotejo  Registro de Calificaciones
		2.Revisión de las evaluaciones.				2.Revisión de las evaluaciones.	
		3. Tabulación de resultados				3. Tabulación de resultados	
	B. DESARROLLO DE LAS SESIONES DE APRENDIZAJE CON GEOGEBRA	4. Fase Motivacional. Recuperar saberes previos. Desarrollo de la sesión. Trabajo y Exposición Grupal			4. Fase Motivacional. Recuperar saberes previos – Desarrollo de la sesión		
		5.Fase aplicativa, Gráfica usando GeoGebra en la Sala de Cómputo. Comprobación con los resultados obtenidos en clases.			5. Trabajo grupal, empleando el enfoque de resolución de problemas Exposición grupal		
		6.Fase evaluación virtual y retroalimentación. Se mide el logro de las actividades propuestas en la sesión. Efectuar la retroalimentación.			6. Retroalimentación de la sesión trabajada en clase.		
	C. PRUEBA DE SALIDA	7. Aplicación del post - test a cada estudiante			7. Aplicación del post - test a cada estudiante		
		8. Tabulación de los resultados			8. Tabulación de los resultados		
		9. Se compara los resultados con los del grupo control			9. Se compara los resultados con los del grupo control		

**Tabla 4.**

*Variable dependiente (Y): Métodos de solución de problemas para sistemas de ecuaciones lineales*

VARIABLE DEPENDIENTE	DIMENSIONES	INDICADORES	ITEMS	INSTRUMENTO
MÉTODOS DE SOLUCIÓN DE PROBLEMAS PARA UN SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES	REDUCCIÓN	Determina las relaciones de equivalencia en sistemas de ecuaciones lineales	4	PRUEBA DE EVALUACIÓN ESCRITA
		Soluciona sistemas de ecuaciones lineales aplicando el método de reducción.	7	
		Explica el proceso de resolución de sistemas de ecuaciones lineales aplicando la reducción como método.	1	
	SUSTITUCIÓN	Determina las relaciones de equivalencia en sistemas de ecuaciones lineales	5	
		Soluciona sistemas de ecuaciones lineales aplicando el método de sustitución.	10	
		Explica el proceso de resolución de sistemas de ecuaciones lineales aplicando la sustitución como método.	2	
	IGUALACIÓN	Determina las relaciones de equivalencia en sistemas de ecuaciones lineales	6	
		Soluciona sistemas de ecuaciones lineales aplicando el método de igualación.	9	
		Explica el proceso de resolución en sistemas de ecuaciones lineales aplicando la igualación como método.	3	

## CAPÍTULO III: METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

### 3.1 Diseño metodológico

Se desarrolló la investigación bajo el enfoque cuantitativo, mediante el diseño experimental correspondiendo a los cuasi experimentales, considerando que el espacio muestral fue homogéneo en ambos grupos de estudio, tanto en el de control, como el experimental, determinados sin una selección aleatoria. Este tipo de diseño, tiene una amplia aplicación en las ciencias sociales y es recomendado en estudios sobre pedagogía y ciencias de la educación.

G <sub>1</sub> :	O <sub>1</sub>	X	O <sub>2</sub>
G <sub>2</sub> :	O <sub>3</sub>	-	O <sub>4</sub>

G<sub>1</sub> : Grupo de trabajo

G<sub>2</sub> : Grupo de control O<sub>1</sub>

y O<sub>3</sub> : Medición previa

X : Administración del tratamiento. Empleo del software GeoGebra O<sub>2</sub>

y O<sub>4</sub> : Medición posterior

H <sub>0</sub>	:	O <sub>2</sub>	=	O <sub>4</sub>
H <sub>1</sub>	:	O <sub>2</sub>	>	O <sub>4</sub>

H<sub>0</sub> : Hipótesis Nula

H1 : Hipótesis Alternativa

### 3.2 Diseño muestral

Conformaron la población, un total de 150 escolares del 5to año de estudios del nivel secundario, matriculados y asistentes al año escolar 2018 en la Institución Educativa N° 1228 “Leoncio Prado” de Ate, Lima.

Se aplicó el muestreo no probabilístico por conveniencia, donde los sujetos fueron seleccionados aplicando criterios de conveniencia y acceso para el investigador. (Bernal, 2010). Por lo que se determinó trabajar con dos secciones al que tenemos acceso y que por los contenidos objeto de la presente investigación se consideró conveniente trabajar con los estudiantes del 5to grado asignándose los grupos naturales (secciones) de forma aleatoria a los grupos de estudio.

**Tabla 5.**

*Grupos de investigación*

<b>Grupos</b>	<b>Secciones</b>	<b>Total</b>
Experimental	5to grado “A”	28
Control	5to grado “B”	28
<b>Total</b>		<b>56</b>

### 3.3 Técnicas de recolección de datos

#### 3.3.1. Descripción de los instrumentos

En la recolección de datos se ha tomado en cuenta dos instrumentos, uno para cada una de las variables determinadas en la presente investigación.

Para la variable independiente: **Aplicación del GeoGebra**, se ha considerado la técnica de la observación. Según Fernández (2013) “la observación constituye una estrategia fundamental del método científico, supone una conducta deliberada entre el sujeto y el evaluador, cuyo objetivo es recoger datos para que se formule o verifique una hipótesis”. (p.199).

Como instrumento se ha realizado una ficha de observación estructurada en una lista de cotejo. Para esta investigación la ficha de observación estructurada tiene la función de

controlar la aplicación de los resultados de la variable independiente. En esta se consideran y anotan los avances de los estudiantes del grupo experimental y del grupo de control.

Para la variable dependiente: **Métodos de solución de problemas para sistemas de ecuaciones lineales**, se ha tomado en cuenta la técnica de la evaluación, con sus respectivas pruebas de evaluación como instrumento. Este, es un instrumento que permite medir a la variable dependiente a través de dos evaluaciones: Pretest y Postest.

En los estudios con diseño experimental y de manera específica en los estudios cuasi experimentales se aplica el instrumento a ambos grupos (experimental y control) al inicio del estudio para poder evaluar su desempeño y constatar que está cuantificando correctamente lo que se desea medir. El instrumento fue una prueba de evaluación de tipo objetiva, que comprende problemas sobre las dimensiones de reducción, sustitución e igualación con un total de 10 ítems.

La verificación de la validez de los instrumentos efectuó mediante el juicio de expertos, integrado por un juez de contenidos, un juez de metodología y un juez estadístico.

**Tabla 6.**

*Resultados juicio de expertos*

JUECES	CRITERIOS										PROM
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
Juez1	4	4	4	4	5	4	4	5	5	5	0.88
Juez2	4	4	4	5	4	4	5	4	5	4	0.86
Juez3	5	5	4	5	5	4	5	5	5	5	0.96
<b>Promedio valoración general</b>											<b>0.90</b>

Siendo el promedio del coeficiente de validez = 0.90 (90%) por expertos, se asumió como valido para su aplicación.

### **3.4 Técnicas estadísticas para el procesamiento de la información**

El procesamiento de los datos se realizó mediante procedimientos electrónicos aplicando el software estadístico SPSS.

El análisis estadístico de los datos correspondientes a la evaluación de la comprensión de los métodos de resolución de problemas de sistemas de ecuaciones lineales, que corresponde a una escala de medición de intervalo, se aplicó el análisis paramétrico a través de la prueba t Student para la comparación de medias de los resultados de los grupos de estudio.

El tratamiento estadístico de los datos, implicó el empleo de técnicas descriptivas para la determinación de los estadísticos de tendencia central y de dispersión.

Los estadísticos descriptivos nos permitieron establecer la media aritmética o promedio ( $\bar{x}$ ) de la evaluación en las muestras para cada uno de los grupos de análisis, la mediana (Me) que es el valor central de las observaciones y la moda (Mo) como aquella que más se repite en una serie de observaciones. Asimismo, los estadísticos de dispersión determinados comprendieron la desviación estándar (S) y la varianza (S<sup>2</sup>), estableciéndose la dispersión de las distribuciones de los puntajes en relación a la media, además para la comprobación de las hipótesis se determinó el nivel de significancia  $p$ .

### **3.5 Aspectos éticos**

En las diferentes etapas de la investigación se consideraron los aspectos éticos, comprendiendo:

Los derechos de autor, comprendió el respeto a la creatividad intelectual expresada en la referencia a las citas de las ideas de los autores que se tomaron como aportes teóricos para la investigación.

La validez y confidencialidad de la información, comprendió la veracidad de los datos los mismos que se recolectaron de los grupos de estudio de forma directa sin alterarlo, asimismo, la confidencialidad de los participantes que contribuyeron al desarrollo del estudio y la información proporcionada al consignar de forma anónima los datos sin difundir sus identidades

## **CAPÍTULO IV: RESULTADOS**

### **4.1 Resultados del aprendizaje de métodos de solución de problemas de sistemas de ecuaciones lineales.**

#### **4.1.1 GeoGebra en la solución de problemas del sistema de ecuaciones lineales**

En la tabla 7 se muestra, las puntuaciones en el pretest de las calificaciones en la solución de problemas del sistema de ecuaciones lineales por la aplicación del programa GeoGebra en las sesiones de aprendizaje, donde el grupo de control presenta mayor frecuencia en la puntuación de 8 (39,8%) y el grupo experimental en 12 puntos (14,3%) los mismo que constituyen la moda para los datos.

Los estadísticos muestran que el promedio de puntuación en la evaluación de los estudiantes presenta una diferencia 0,29 puntos del grupo experimental (10,21) frente al grupo de control (10,50) antes del inicio de la experimentación con el programa GeoGebra en los alumnos del 5º grado de secundaria de la I.E. N° 1228 “Leoncio Prado” de, lo que indicaría la paridad en los promedios y base para el desarrollo de la investigación. Asimismo, la desviación estándar de las puntuaciones en la evaluación del grupo de control es 3,203 siendo menor al del grupo experimental que es 5,343 puntos lo que implica que las puntuaciones son variadas.



**Tabla 7.**

*Puntuación pretest en la solución de problemas de sistemas de ecuaciones de lineales de los grupos de control y experimental*

	Control		Experimental	
	Frecuencia	Porcentaje	Frecuencia	Porcentaje
2			2	7,1
3			3	10,7
4			2	7,1
6			1	3,6
7			1	3,6
8	11	39,3	2	7,1
9	4	14,3	1	3,6
10	5	17,9		
11			2	7,1
12	1	3,6	4	14,3
13	1	3,6	2	7,1
14	2	7,1	2	7,1
15	1	3,6	1	3,6
16	1	3,6	2	7,1
17	1	3,6		
18			1	3,6
19	1	3,6	2	7,1
Total	28	100,0	28	100,0

Fuente: Cuestionario de evaluación aplicado a los estudiantes

#### Estadísticos

		Pretest C	Pretest E
N	Válido	28	28
Media		10,50	10,21
Mediana		9,00	11,50
Moda		8	12
Desviación estándar		3,203	5,343
Rango		11	17
Mínimo		8	2
Máximo		19	19

Fuente: Elaboración propia

Concluido el proceso de experimentación aplicando GeoGebra, los resultados de la evaluación posterior (postest) determinados se muestran en la tabla siguiente:

**Tabla 8.**

Puntuación posttest de la solución de problemas del sistema de ecuaciones lineales de los grupos de control y experimental

	Control		Experimental	
	Frecuencia	Porcentaje	Frecuencia	Porcentaje
10	4	14,3		
11	6	21,4	5	17,9
12	5	17,9	3	10,7
14	6	21,4	3	10,7
15			2	7,1
16	3	10,7		
17	1	3,6	3	10,7
18	2	7,1	6	21,4
19			4	14,3
20	1	3,6	2	7,1
<b>Total</b>	<b>28</b>	<b>100,0</b>	<b>28</b>	<b>100,0</b>

Fuente: Cuestionario de evaluación aplicado a los estudiantes

<b>Estadísticos</b>			
		Postest_C	Postest_E
N	Válido	28	28
Media		13,25	15,64
Mediana		12,00	17,00
Moda		11 <sup>a</sup>	18
Desviación estándar		2,797	3,211
Rango		10	9
Mínimo		10	11
Máximo		20	20

a. Presenta múltiples modos.

Fuente: Elaboración propia

En la tabla 8 se muestra, las puntuaciones en el posttest de las calificaciones en la solución de problemas de sistemas de ecuaciones lineales por el empleo del programa GeoGebra en las sesiones de aprendizaje, donde el grupo de control presenta mayor frecuencia en la puntuación de 11 y 14 (21,4%) y el grupo experimental en 18 puntos (21,4%) los mismo que constituyen la moda para los datos.

Los estadísticos muestran que la media aritmética de puntuación en la evaluación de los estudiantes sin aplicación del GeoGebra (control) y con aplicación del GeoGebra (experimental) presentan diferencias en 2,39 puntos entre el grupo experimental (15,64) y el grupo de control (13,25). Esto significa que los resultados alcanzados en la solución de problemas de sistemas de ecuaciones lineales tienden a mejorar en los estudiantes del 5º grado del nivel secundario de la I.E. N° 1228 “Leoncio Prado” de Ate al emplear el programa GeoGebra. Asimismo, la desviación estándar de las puntuaciones alcanzadas en la evaluación por el grupo de control es 2,797 siendo inferior al del grupo experimental que alcanza 3,211 puntos, lo que implica que las puntuaciones no están muy dispersas.

## GeoGebra en la comprensión del método de reducción de ecuaciones lineales

Tabla 9.

*Puntuación pretest de la comprensión de la reducción de sistemas de ecuaciones de lineales de los grupos de control y experimental*

	Control		Experimental	
	Frecuencia	Porcentaje	Frecuencia	Porcentaje
0	0	0	2	7,1
3	1	3,6	4	14,3
5	3	10,7	3	10,7
8	4	14,3	3	10,7
10	7	25,0	4	14,3
13	5	17,9	4	14,3
15	4	14,3	0	0
18	3	10,7	3	10,7
20	1	3,6	5	17,9
Total	28	100,0	28	100,0

Fuente: Cuestionario de evaluación aplicado a los estudiantes

<b>Estadísticos</b>			
		Pre C Reduccion	Pre E Reduccion
N	Válido	28	28
Media		11,39	10,61
Mediana		10,00	10,00
Moda		10	20
Desviación estándar		4,400	6,669
Rango		17	20
Mínimo		3	0
Máximo		20	20

Fuente: Elaboración propia

En los resultados de la tabla 9, las puntuaciones en el pretest de las calificaciones en la solución de problemas de comprensión del método de reducción del sistema de ecuaciones lineales antes del empleo del programa GeoGebra en el desarrollo de las sesiones de aprendizaje, se observa que las frecuencias del grupo de control se distribuyen distribuidos en un rango de 3 a 20 puntos presentando mayor frecuencia en 10 puntos (25,0%), seguido de 13 con 17,5% ,mientras que el grupo experimental las frecuencias se distribuyen de 0 a 20 puntos donde 20 puntos (17,9%) es la mayor seguida de 3,10, 13 puntos respectivamente con 14,3%.

Los estadísticos de los datos muestran que el promedio de puntuación en la evaluación de los estudiantes presenta una diferencia de 0,78 puntos entre el grupo experimental (10,61) frente al grupo de control (11,39) antes del inicio de la experimentación con el programa GeoGebra en los alumnos del 5º grado de secundaria de la I.E. N° 1228 "Leoncio Prado" de Ate, lo que indicaría que las puntuaciones son casi cercanas para el desarrollo de la investigación, con una moda en el grupo de control de 10 puntos y 20 en el grupo de experimentación. Asimismo, la desviación estándar en las puntuaciones alcanzadas en la evaluación, el grupo de control muestra 4,400 puntos siendo menor al del grupo experimental que es 6,669 puntos lo que implica que las puntuaciones son variadas.

**Tabla 10.**

*Puntuación posttest en la comprensión del método de reducción de sistemas de ecuaciones lineales de los grupos de control y experimental*

	Control		Experimental		Fuente: Cuest
	Frecuencia	Porcentaje	Frecuencia	Porcentaje	
8	3	10,7			
10	11	39,3	6	21,4	
13	4	14,3	2	7,1	
15	4	14,3	6	21,4	
18	5	17,9	6	21,4	
20	1	3,6	8	28,6	
Total	28	100,0	28	100,0	

ionario de evaluación aplicado a los estudiantes

#### Estadísticos

	Pos_C_Reduccin	Pos_E_Reduccin
N Válido	28	28
Media	12,71	15,86
Mediana	11,50	16,50
Moda	10	20
Desviación estándar	3,660	3,808
Rango	12	10
Mínimo	8	10
Máximo	20	20

Fuente: Elaboración propia

Por otro lado, en la tabla 10 tenemos las distribuciones de las puntuaciones del posttest obtenidos de la solución de problemas con el método de reducción de ecuaciones del sistema de ecuaciones lineales por el empleo del programa GeoGebra en las sesiones de aprendizaje en un rango de 8 a 20 puntos del grupo de control y de 10 a 20 del grupo de experimentación, donde el grupo de control presenta mayor frecuencia en la puntuación de 10 (39,3%) y el grupo experimental en 20 puntos (28,6%) los mismo que constituyen la moda para los datos.

Los estadísticos muestran que la media aritmética de puntuación en la evaluación de los estudiantes sin aplicación del GeoGebra (control) y con aplicación del GeoGebra (experimental) presentan una diferencia mayor de 3,15 puntos del grupo experimental (15,86) frente al grupo de control (12,71). Esto significa que los resultados encontrados para la solución de problemas del sistema de ecuaciones lineales tienden a mejorar en los escolares del 5º grado de secundaria de la I.E. N° 1228 “Leoncio Prado” de Ate al emplear el programa GeoGebra. Asimismo, la desviación estándar de las puntuaciones en el grupo de control es 3,660 siendo menor al del grupo experimental que es 3,808 puntos lo que implica que las puntuaciones no están muy dispersas

#### 4.1.2 GeoGebra en comprensión del método de sustitución de ecuaciones lineales

**Tabla 11.**

*Puntuación pretest en la comprensión del método de sustitución en sistemas de ecuaciones lineales de los grupos de control y experimental*

	Control		Experimental	
	Frecuencia	Porcentaje	Frecuencia	Porcentaje
0			2	7,1
3	3	10,7	2	7,1
7	7	25,0	2	7,1
10	6	21,4	2	7,1
13	6	21,4	10	35,7
17	3	10,7	5	17,9
20	3	10,7	5	17,9
Total	28	100,0	28	100,0

#### Estadísticos

	Pre_C_Sustitución	Pre_E_Sustitución
N	Válido	28
Media	10,96	12,68
Mediana	10,00	13,00
Moda	7	13
Desviación estándar	5,037	5,932
Rango	17	20
Mínimo	3	0
Máximo	20	20

Fuente: Elaboración propia

En los resultados del pretest de las calificaciones en la solución de problemas de comprensión del método de reducción del sistema de ecuaciones lineales por el empleo del programa GeoGebra en el desarrollo de las clases presentados en la tabla 5, se observa que las distribuciones del grupo de control se dispersan en un rango de 3 a 20 puntos presentando mayor frecuencia en 7 puntos (25,0%), mientras que el grupo experimental las frecuencias se distribuyen de 0 a 20 puntos donde 13 puntos (35,7%), frecuencias que se constituyen en la moda de la distribución.



Los estadísticos de los datos muestran que el promedio de puntuación en la evaluación de los estudiantes presenta una diferencia de 1,72 puntos entre el grupo experimental (12,68) frente al grupo de control (10,96), lo que establece que el grupo experimental antes del inicio de la experimentación con el programa GeoGebra en los escolares del 5º grado de secundaria de la I.E. N° 1228 “Leoncio Prado” de Ate es mayor. Asimismo, las puntuaciones de la evaluación del grupo de control muestran una desviación estándar de 5,037 siendo menor al del grupo experimental que es 5,932 puntos lo que implica que las puntuaciones no presentan variabilidad.

**Tabla 12.**

*Puntuación posttest en la comprensión del método de sustitución en sistemas de ecuaciones de lineales de los grupos de control y experimental*

	Control		Experimental	
	Frecuencia	Porcentaje	Frecuencia	Porcentaje
7	1	3,6		
10	10	35,7	2	7,1
13	5	17,9	9	32,1
17	6	21,4	5	17,9
20	6	21,4	12	42,9
Total	28	100,0	28	100,0

*Fuente:* Cuestionario de evaluación aplicado a los estudiantes

<b>Estadísticos</b>			
		Pos_C_Sustitucion	Pos_E_Sustitucion
N	Válido	28	28
Media		14,07	16,50
Mediana		13,00	17,00
Moda		10	20
Desviación estándar		4,233	3,564
Rango		13	10
Mínimo		7	10
Máximo		20	20

Fuente: Elaboración propia

Por otro lado, en la tabla 11 tenemos las distribuciones de las puntuaciones del post test obtenidos de la solución de problemas por la comprensión del método de sustitución en sistemas de ecuaciones lineales empleando el programa GeoGebra en el desarrollo de la ejecución de las clases en un rango de 7 a 20 puntos en el grupo de control y de 10 a 20 en el grupo de experimentación, donde el grupo control presenta mayor frecuencia en la puntuación de 10 (35,7%) y el grupo experimental en 20 puntos (42,9%) los mismo que constituyen la moda para los datos.

La media aritmética muestra que la puntuación en la evaluación de los estudiantes sin empleo de GeoGebra (control) y con empleo de GeoGebra (experimental) presentan diferencias mayores a 2,43 puntos del grupo experimental (16,50) frente al grupo de control

(14,07).

Esto significa que los logros en la solución de problemas de sistemas de ecuaciones lineales con el método de sustitución tienden a mejorar en los estudiantes del 5º grado de secundaria de la I.E. N° 1228 “Leoncio Prado” de Ate al emplear el software GeoGebra. La desviación estándar del grupo de control alcanza 4,233 puntos menor al del grupo experimental que es 3,564 puntos lo que implica que las puntuaciones no están muy dispersas.

## GeoGebra en comprensión del método de igualación de un sistema de ecuaciones lineales

**Tabla 13.**

*Puntuación pretest en la comprensión del método de igualación en sistemas de ecuaciones lineales de los grupos de control y experimental.*

	Control		Experimental	
	Frecuencia	Porcentaje	Frecuencia	Porcentaje
0	-	0,0	6	21,4
3	4	14,3	6	21,4
7	8	28,6	3	10,7
10	10	35,7	6	21,4
13	4	14,3	4	14,3
17	1	3,6	1	3,6
20	1	3,6	2	7,1
Total	28	100,0	28	100,0

Fuente: Cuestionario de evaluación aplicado a los estudiantes

### Estadísticos

	Pre_C Igualacion	Pre_E Igualacion	
N	Válido 28	28	a
Media	9,18	7,43	.
Mediana	10,00	7,00	P
Moda	10	0 <sup>a</sup>	r
Desviación estándar	4,010	6,149	e
Rango	17	20	s
Mínimo	3	0	e
<u>Máximo</u>	<u>20</u>	<u>20</u>	n

ta múltiples modos.

Fuente: Elaboración propia

En los resultados de la tabla 12 correspondientes al pretest de las calificaciones en la solución de problemas de comprensión del método de igualación del sistema de ecuaciones lineales por el empleo del programa GeoGebra en el desarrollo de las sesiones de aprendizaje, observándose que las proporciones del grupo de control se distribuyen en un rango de 3 a 20 puntos presentando mayor frecuencia en 10 puntos (35,7%), mientras que el grupo experimental las frecuencias se distribuyen de 0 a 20 puntos donde 0, 3 y 10 puntos (21,4%), frecuencias que se constituyen en la moda de la distribución.

Los estadísticos de los datos muestran que el promedio de puntuación en la evaluación de los estudiantes presenta una diferencia de 1,75 puntos entre el grupo experimental (7,43) frente al grupo de control (9,18), lo que establece que el grupo experimental antes del inicio de la experimentación con el programa GeoGebra en los alumnos del 5º grado de secundaria de la I.E. N° 1228 “Leoncio Prado” de Ate es menor. La desviación estándar en el grupo de control alcanza 4,010 puntos, menor al del grupo experimental que es 6,149 puntos lo que implica que las puntuaciones son más dispersas.

**Tabla 14.**

*Puntuación posttest en la comprensión del método de igualación de sistemas de ecuaciones de lineales de los grupos de control y experimental*

	Control		Experimental	
	Frecuencia	Porcentaje	Frecuencia	Porcentaje
3	1	3,6	0	0,0
7	1	3,6	3	10,7
10	8	28,6	5	17,9
13	10	35,7	6	21,4
17	4	14,3	5	17,9
20	4	14,3	9	32,1
Total	28	100,0	28	100,0

Fuente: Cuestionario de evaluación aplicado a los estudiantes

<b>Estadísticos</b>			
		Pos_C_Igualacion	Pos_E_Igualacion
N	Válido	28	28
Media		13,14	14,79
Mediana		13,00	15,00
Moda		13	20
Desviación estándar		4,161	4,654
Rango		17	13
Mínimo		3	7
Máximo		20	20

Fuente: Elaboración propia

Por otro lado, en la tabla 13 tenemos las distribuciones de las puntuaciones del post test obtenidos de la solución de problemas con el método de igualación de un sistema de ecuaciones lineales por el empleo del programa GeoGebra en la ejecución de las clases, en un rango de 3 a 20 puntos para el grupo control y de 7 a 20 para el grupo del experimento, donde el grupo de control presenta mayor frecuencia en la puntuación de 13 (35,7%) y el grupo experimental en 20 puntos (32,1%) los mismo que constituyen la moda para los datos.

Los estadísticos muestran que la media aritmética en la evaluación de los estudiantes sin aplicación del GeoGebra (control) y con aplicación del GeoGebra (experimental) presentan una diferencia poco significativa de 1,65 puntos del grupo experimental (14,79) comparados a los alcanzados por el grupo de control (13,14). Esto significa que los resultados en la solución

de problemas del sistema de ecuaciones lineales con el método de igualación tienden a mejorar en los estudiantes del 5º grado de secundaria de la I.E. N° 1228 “Leoncio Prado” de Ate al emplear el programa GeoGebra. Por otro lado, la desviación estándar es 4,161 puntos en el grupo control siendo menor al del grupo experimental que es 4,654 puntos lo que implica que las puntuaciones no están muy dispersas.

## 4.2 Prueba de hipótesis

### 4.2.1 Prueba de normalidad

Se aplicó la prueba de Shapiro-Wilk para analizar la normalidad de los datos de la prueba de la comprensión de los métodos de solución de problemas en sistemas de ecuaciones lineales posterior al empleo de GeoGebra por los estudiantes del 5º grado de secundaria en la I.E. N° 1228 “Leoncio Prado” de Ate conformantes del grupo de experimental y control cuyo número es 28 que es menor que 30, siendo una muestra pequeña ( $n < 30$ ).

El análisis de normalidad se realizó a un nivel de confianza del 95%, si el p-valor es mayor que el nivel de significancia ( $p > \alpha$ ), aceptamos  $H_0$  siendo la distribución normal, para la cual se planteó las siguientes hipótesis:

$H_0$ : El conjunto de datos en estudio de la muestra tienen distribución normal.

$H_1$ : El conjunto de datos en estudio de la muestra no tienen distribución normal.

**Tabla 15.**

*Prueba de normalidad*

	Shapiro-Wilk		
	Estadístico	gl	Sig.
Pre Test	,785	28	,000
Pos test	,940	28	,107

De acuerdo a los datos de la tabla 14, los resultados de la prueba Shapiro – Will muestran que el p-valor es mayor que el nivel de significancia (0.05) para los resultados del postest, por lo tanto, aceptamos la hipótesis nula, concluyéndose que la distribución de la muestra es normal.

El resultado de la prueba, nos señala que la prueba de la hipótesis debe ser paramétrica correspondiendo aplicar la comparación de medias para los resultados

el grupo experimental y el grupo de control, la prueba es la t de Student para grupos independientes.



#### 4.2.2 Prueba de la hipótesis general

##### a) Planteamiento de hipótesis estadística

H1: ( $\mu_1 \neq \mu_2$ ) Existen diferencias significativas en la media aritmética del postest del grupo de control y grupo de experimentación en la comprensión de los métodos de solución de problemas en sistemas de ecuaciones lineales por empleo de GeoGebra.

H0: ( $\mu_1 = \mu_2$ ) No Existen diferencias significativas en la media aritmética del postest del grupo de control y grupo de experimentación en la comprensión de los métodos de solución de problemas en sistemas de ecuaciones lineales por empleo de GeoGebra.

##### b) Nivel de significancia

La prueba comprendió un nivel de significancia del 5%,  $\alpha = 0.05$

##### c) Estadístico de prueba

Basándonos que las muestras de trabajo son pequeñas ( $n < 30$ ), el estadístico para la prueba que corresponde es la *t de Student* para grupos independientes a dos colas.

##### d) Cálculo del estadístico con SPSS

**Tabla 16.**

*Estadísticas de los grupos*

	Grupos	N	Media	Desviación estándar	Media de error estándar
Postest	Control	28	13,25	2,797	,529
	Experimental	28	15,64	3,211	,607

Fuente: Cuestionario de evaluación aplicado a los estudiantes

**Tabla 17.***Prueba de muestras independientes*

		Postest		
		Se asumen	No se asumen	
		varianzas iguales	varianzas iguales	
prueba t para la diferencia de medias	T	-2,973	-2,973	
	GI	54	53,002	
	Sig. (bilateral)	,004	,004	
	Diferencia de medias	-2,393	-2,393	
	Diferencia de error estándar	,805	,805	
	95% de intervalo de confianza	Inferior	-4,006	-4,007
		Superior	-,779	-,779
	de la diferencia			

Fuente: Elaboración propia

**e) Conclusión**

Considerando que el valor de significancia observado para la prueba es menor ( $0,004 < 0,05$ ), se rechaza la hipótesis nula planteada. Concluyéndose que el empleo de GeoGebra favorece significativamente en la comprensión de los métodos de solución de problemas en sistemas de ecuaciones lineales al trabajar con los alumnos del 5º grado de secundaria en la I.E. N° 1228 "Leoncio Prado" de Ate

### 4.2.3 Prueba de la primera hipótesis

#### a) Planteamiento de hipótesis estadística

H1: ( $\mu_1 \neq \mu_2$ ) Existen diferencias significativas en la media aritmética del postest del grupo control y grupo de experimentación para la comprensión del método de reducción en sistemas de ecuaciones lineales por empleo de GeoGebra.

H0: ( $\mu_1 = \mu_2$ ) No existen diferencias significativas en la media aritmética del postest del grupo control y grupo de experimentación para la comprensión del método de reducción en sistemas de ecuaciones lineales por empleo de GeoGebra.

#### b) Nivel de significancia

La prueba comprendió un nivel de significancia del 5%,  $\alpha = 0.05$

#### c) Estadístico de prueba

Basándonos que las muestras de trabajo son pequeñas ( $n < 30$ ), el estadístico para la prueba que corresponde es la *t de Student* para grupos independientes a dos colas.

#### d) Cálculo del estadístico con SPSS

**Tabla 18.**

*Estadísticas de grupo*

	Grupos	N	Media	Desviación estándar	Media de error estándar
Pos_Reducción	Control	28	1,71	3,660	,692
	Experimental	28	15,86	3,808	,720

Fuente: Cuestionario de evaluación aplicado a los estudiantes

**Tabla 19.***Prueba de muestras independientes*

		Postest	
		Se asumen	No se asumen
		varianzas iguales	varianzas iguales
prueba t para la	T	-3,149	-3,149
igualdad de medias	Gl	54	53,916
	Sig. (bilateral)	,003	,003
	Diferencia de medias	-3,143	-3,143
	Diferencia de error estándar	,998	,998
	95% de intervalo de confianza	-5,144	-4,007
	de la diferencia	-1,142	-,779

Fuente: Elaboración propia

**e) Conclusión**

Considerando que el valor de significancia observado para la prueba es menor ( $0,003 < 0,05$ ), se rechaza la hipótesis nula planteada. Concluyéndose que el empleo de GeoGebra favorece significativamente en la comprensión del método de reducción en la solución de problemas en sistemas de ecuaciones lineales al trabajar con los alumnos del 5º grado de secundaria en la I.E. N° 1228 “Leoncio Prado” de Ate.

#### 4.2.4. Prueba de la segunda hipótesis

##### a) Formulación de hipótesis estadística

H1: ( $\mu_1 \neq \mu_2$ ) Existen diferencias significativas en la media aritmética del postest del grupo control y grupo de experimentación para la comprensión del método de sustitución en sistemas de ecuaciones lineales por empleo de GeoGebra.

H0: ( $\mu_1 = \mu_2$ ) No existen diferencias significativas en la media aritmética del postest del grupo control y grupo de experimentación para la comprensión del método de sustitución en sistemas de ecuaciones lineales por empleo de GeoGebra.

##### b) Nivel de significancia

La prueba comprendió un nivel de significancia del 5%,  $\alpha = 0.05$

##### c) Estadístico de prueba

Basándonos que las muestras de trabajo son pequeñas ( $n < 30$ ), el estadístico para la prueba que corresponde es la *t de Student* para grupos independientes a dos colas.

##### d) Cálculo del estadístico con SPSS

Tabla 20.

*Estadísticas de grupo*

	Grupos	N	Media	Desviación estándar	Media de error estándar
Pos_Sustitucion	Control	28	14,07	4,233	,800
	Experimental	28	16,50	3,564	,674

Fuente: Cuestionario de evaluación aplicado a los estudiantes

F

**Tabla 21.***Prueba de muestras independientes*

		Posttest	
		Se asumen	No se asumen
		varianzas	varianzas iguales
		iguales	iguales
prueba t para la	T	-2,322	-2,322
igualdad de medias	GI	54	52,477
	Sig. (bilateral)	,024	,024
	Diferencia de medias	-2,429	-2,429
	Diferencia de error estándar	1,046	1,046
	95% de intervalo de confianza	-4,525	-4,007
	de la diferencia	-,332	-,779

Fuente: Elaboración propia

**e) Conclusión**

Considerando que el valor de significancia observado para la prueba es menor ( $0,024 < 0,05$ ), se rechaza la hipótesis nula planteada. Concluyéndose que el empleo de GeoGebra favorece significativamente en la comprensión del método de sustitución en la solución de problemas en sistemas de ecuaciones lineales al trabajar con los alumnos del 5º grado de secundaria en la I.E. N° 1228 “Leoncio Prado” de Ate.

#### 4.2.5 Prueba de la tercera hipótesis

##### a) Planteamiento de hipótesis estadística

$H_1: (\mu_1 \neq \mu_2)$  Existen diferencias significativas en la media aritmética del posttest del grupo control y grupo de experimentación para la comprensión del método de igualación en sistemas de ecuaciones lineales por empleo de GeoGebra.

$H_0: (\mu_1 = \mu_2)$  No existen diferencias significativas en la media aritmética del posttest del grupo control y grupo de experimentación para la comprensión del método de igualación en sistemas de ecuaciones lineales por empleo de GeoGebra.

##### b) Nivel de significancia

La prueba comprendió un nivel de significancia del 5%,  $\alpha = 0.05$

##### c) Estadístico de prueba

Basándonos que las muestras de trabajo son pequeñas ( $n < 30$ ), el estadístico para la prueba que corresponde es la *t de Student* para grupos independientes a dos colas.

##### d) Cálculo del estadístico con SPSS

**Tabla 22.**

*Estadísticas de grupo*

	Grupos	N	Media	Desviación estándar	Media de error estándar
Pos_Igualacion	Control	28	13,14	4,161	,786
	Experimental	28	14,79	<b>4,654</b>	,879

Fuente: Cuestionario de evaluación aplicado a los estudiantes

**Tabla 23.***Prueba de muestras independientes*

		Postest	
		Se asumen	No se asumen
		varianzas	varianzas
		iguales	iguales
prueba t para la	T	-1,393	-1,393
igualdad de medias	GI	54	53,337
	Sig. (bilateral)	,169	,170
	Diferencia de medias	-1,643	-1,643
	Diferencia de error estándar	1,180	1,180
	95% de intervalo de confianza	-4,008	-4,007
	de la diferencia	,722	,723

Fuente: Elaboración propia

**e) Conclusión**

Si Considerando que el valor de significancia observado para la prueba es mayor (0,169 > 0,05), se acepta la hipótesis nula planteada. Concluyéndose que el empleo de GeoGebra no es estadísticamente significativo en la comprensión del método de igualación en la solución de problemas en sistemas de ecuaciones lineales al trabajar con los alumnos del 5º grado de secundaria en la I.E. N° 1228 “Leoncio Prado” de Ate.



## CAPÍTULO V: DISCUSIÓN

La investigación se orientó a experimentar el empleo de GeoGebra para determinar la influencia sobre el aprendizaje de métodos de solución de problemas de sistemas de ecuaciones lineales en los escolares del 5º grado del nivel secundario de la I.E. N° 1228 “Leoncio Prado” de Ate, Lima, 2018. Concluida la fase de experimentación trabajando el desarrollo de los contenidos en el aula, se encontró que los aprendizajes mejoraron en los estudiantes como resultado de su aplicación en el desarrollo de las sesiones de aprendizaje, estableciéndose diferencias en las medias en las puntuaciones obtenidas en la evaluación del grupo experimental que trabajo con GeoGebra (15,64) y las puntuaciones del grupo control que trabajó sin GeoGebra (13,25), mostrando ello una influencia significativa a un nivel de significancia de  $p = 0,004$  inferior a  $\alpha = 0,05$ , asimismo, se observa el incremento de las puntuación en 5.43 puntos comparando las puntuaciones determinadas el pre test (10,21) frente a los del postest (15,64).

Estos resultados obtenidos en la investigación por el empleo del software GeoGebra en los aprendizajes, tienen explicación científica desde los planteamientos de GeoGebra Perú sobre las formas de trabajar con el software, debido a que posibilitó que los estudiantes aborden el estudio del algebra de forma interactiva, apoyando a la comprensión de contenidos matemáticos complejos. Asimismo, realizar de forma práctica y rápida construcciones de graficas que posibilitan determinar las relaciones entre la figura construida. (Andrés, 2014), “comprensión que va ayudar al mejor entendimiento, en nuestro caso de los sistemas de

ecuaciones lineales y por lo tanto de la mejora de los aprendizajes”.

Jiménez, J. y Jimenes, S. (2017) expresan que el aprovechamiento de los computadores posibilita que mejoren el rendimiento académico en los alumnos. Considerando que GeoGebra es un programa que posibilita a los alumnos pensar matemáticamente e incrementar la comprensión y capacidad de resolución de problemas, debido a que proporciona diversas estrategias para el planteamiento de enunciados, exploración de situaciones y nuevos métodos de resolución (p.11) planteamientos que nos ayudan a comprender las mejoras y diferencias en los resultados en la puntuación de los estudiantes antes y después de la investigación. Destacamos que los resultados encontrados tienen coincidencias con los alcanzados por Lázaro y Quichca (2018) en su tesis “Enfoque de Parzysz sobre los niveles de Pensamiento Geométrico y Software GeoGebra en Estudiantes del 2° Grado Secundaria, Huancavelica”, donde se percibe “el incremento de los promedios de calificación de 7,77 puntos obtenidos en el pretest (8,59) y los alcanzados en el post test (16,36) en el pensamiento geométrico por el empleo del GeoGebra”. De forma similar con los obtenidos por Bermeo (2017) en la tesis “Influencia del Software GeoGebra en el aprendizaje de graficar funciones reales en estudiantes del primer ciclo de la Universidad Nacional de Ingeniería – 2016”, encontrándose diferencias en la puntuación pre y post test por efecto de la aplicación del software, por lo que concluye que influye de forma significativa sobre el aprendizaje de los estudiantes para graficar funciones.

Considerando los resultados alcanzados y la discusión realizada para la presente investigación, asumimos la importancia del empleo del software GeoGebra en el desarrollo de capacidades en el empleo de estrategias, la graficación y comprensión de sistemas de ecuaciones lineales, por lo que, debe sugerimos continuar con investigaciones que ayuden a seguir validando su influencia sobre los aprendizajes.

## CONCLUSIONES

- 1) Se determina la influencia significativa de la aplicación de GeoGebra sobre los aprendizajes de los métodos de solución para sistemas de ecuaciones lineales en los escolares del 5º grado del nivel secundario de la I.E. N° 1228 “Leoncio Prado” de Ate, Lima – 2018, sustentado en la prueba de diferencias de medias de puntuación obtenidas por el grupo experimental con GeoGebra (15,64) frente a las puntuaciones del grupo de control sin GeoGebra (13,25), alcanzando una significancia  $p = 0,004$  menor que  $\alpha = 0,05$ , asimismo, por el incremento de las puntuación en 5.43 puntos alcanzada en el pre test (10,21) frente a los del pos test (15,64).
- 2) Se determina la influencia significativa de la aplicación de GeoGebra sobre el aprendizaje de la comprensión del método de reducción en sistemas de ecuaciones lineales en los escolares del 5º grado de secundaria de la I.E. N° 1228 “Leoncio Prado” de Ate, Lima – 2018, sustentado en la prueba de diferencias de medias de puntuación obtenidas por el grupo experimental (15,86) frente a las puntuaciones del grupo de control (12,71) alcanzando una significancia  $p = 0,003$  menor que  $\alpha = 0,05$ , asimismo, por el incremento de la puntuación en 5.25 puntos alcanzada en el pre test (10,61) frente a los del postest (15,86).
- 3) Se determina la influencia significativa la aplicación de GeoGebra sobre el aprendizaje de la comprensión del método de sustitución en sistemas de ecuaciones lineales en los escolares del 5º grado de secundaria de la I.E. N° 1228 “Leoncio Prado” de Ate, Lima –

2018, sustentado en la prueba de diferencias de medias de puntuación obtenidas por el grupo experimental (16,50) frente a las puntuaciones del grupo de control (14,07) alcanzando una significancia  $p = 0,024$  menor que  $\alpha = 0,05$ , asimismo por el incremento de la puntuación en 3.82 puntos alcanzada en el pre test (12,68) frente a los del postest (16,50).

- 4) Se determina la influencia no significativa de la aplicación de GeoGebra sobre el aprendizaje de la comprensión del método de igualación en sistemas de ecuaciones lineales en los escolares del 5º grado de secundaria de la I.E. N° 1228 “Leoncio Prado” de Ate, Lima – 2018, sustentado en la prueba de diferencias de medias de puntuación obtenidas por el grupo experimental (14,79) frente a las puntuaciones del grupo de control (13,14) alcanzando una significancia  $p = 0,169$  mayor que  $\alpha = 0,05$ , asimismo por el incremento de las puntuación en 7.36 puntos alcanzada en el pre test (7,43) frente a los del postest (14,79).

## RECOMENDACIONES

- 1) Las Unidades de Gestión Local del Ministerio de Educación deben promover el aprovechamiento de los recursos educativos digitales mediante la aplicación de programas como GeoGebra en el desarrollo de las sesiones de aprendizaje, incrementando y optimizando las aulas de recursos tecnológicos con equipos de última tecnología.
- 2) La institución educativa debe designar docentes con formación o especialización en el aprovechamiento de las tecnologías de información y comunicación con el propósito que puedan proponer y orientar el aprovechamiento en el aula la aplicación didáctica de programas informáticos en el desarrollo de las sesiones de aprendizaje de las diferentes asignaturas.
- 3) Los docentes deben asumir el empleo de las tecnologías de información y comunicación como un recurso muy importante en el desarrollo de los procesos de enseñanza aprendizaje para fomentar el aprendizaje significativo y experiencias de los contenidos curriculares.
- 4) La comunidad de investigadores e instituciones de formación docente deben establecer líneas de investigación referido al empleo de programas especializados, que permitan establecer estrategias para la integración y aprovechamiento educativo en la formación de capacidades y mejora de los logros del aprendizaje en los estudiantes.

## FUENTES DE INFORMACIÓN

- Andrés, M. (2014). Conociendo el GeoGebra. Recuperado <http://GeoGebraperu.blogspot.com/2014/08/conociendo-el-GeoGebra.html>
- Barahona, F., Barrera, O., Vaca, B. y Hidalgo, B. (2015). GeoGebra para la enseñanza de la matemática y su incidencia en el rendimiento académico estudiantil. *Revista Tecnológica ESPOL – RTE*, 28 (5), 121-132.
- Bermeo, O. (2017). Influencia del software GeoGebra en el aprendizaje de graficar funciones reales en estudiantes del primer ciclo de la Universidad Nacional de Ingeniería – 2016 (tesis doctoral). Universidad Cesar Vallejo, Perú. Recuperado <http://repositorio.ucv.edu.pe/handle/UCV/5190>
- Blum, W. Druke-Noe, D. Hartung, R. y Koller, O. (2015). *Estándares de Aprendizaje de la Matemática*. Perú: SINEACE (Sistema Nacional de Evaluación y Acreditación).
- Contreras, C. (2017). Aplicación de GeoGebra para mejorar el aprendizaje de transformaciones en el plano de los estudiantes del nivel secundario –Lima, 2017. (Tesis de maestría, Universidad Cesar Vallejo, Lima). Recuperado <http://repositorio.ucv.edu.pe/handle/UCV/14140>
- Clapham, C. (2008). *Diccionario de Matemáticas*. España: Editorial Complutense.
- Colombia Aprendiendo (s.f.). *¿Qué es GeoGebra?* Recuperado <http://www.colombiaaprendiendo.edu.co/GeoGebra/que-es-GeoGebra/>

- Cortez, J. Y Guerra, M. (Edit.) (2001). *Uso de Tecnología en Educación: Matemática Investigaciones e Propuestas 2011*. México: A.M.I.U.T.E.M.
- Erazo (2011). *Estrategia didáctica para la enseñanza-aprendizaje de ecuaciones lineales con una incógnita y su aplicación en situaciones problema*. Recuperado <http://funes.uniandes.edu.co/2599/1/erazoEstrategiaAsocolme2011.pdf>
- Fernández, R. (2013). *Evaluación Psicológica*. Madrid: Editorial Pirámide.
- García, F., Portillo, J., Romo, J., y Benito, M. (2007). *Nativos digitales y modelos de aprendizaje*. En SPDECE. Recuperado de <http://ftp.informatik.rwth-aachen.de/Publications/CEUR-WS/Vol-318/Garcia.pdf>
- García-Valcarcel, A. (2003). *Tecnología educativa. Implicaciones educativas del desarrollo tecnológico*. Madrid: La Muralla.
- García-Valcarcel, A. (2015). *Proyectos de trabajo colaborativo con TIC*. Madrid: Editorial Síntesis S.A.
- Jiménez, J. Jiménez, S. (2017). *GeoGebra, una propuesta para innovar el proceso enseñanza-aprendizaje en matemáticas*. Recuperado <http://ctes.org.mx/index.php/ctes/article/view/654>
- Lázaro, I. y Quichca, W. (2018). Enfoque de Parzysz sobre los niveles de Pensamiento Geométrico y Software GeoGebra en Estudiantes del 2° Grado Secundaria, Huancavelica (Tesis de pregrado, Universidad Nacional de Huancavelica, Perú). Recuperado <http://repositorio.unh.edu.pe/handle/UNH/1867>
- Marqués, P. (1996). *El software educativo*. Universidad de Barcelona. Recuperado [http://www.lmi.ub.es/te/any96/marques\\_software/](http://www.lmi.ub.es/te/any96/marques_software/)
- Marmolejo, J. (2011). *Uso de las TIC como herramienta pedagógica en la enseñanza de las matemáticas*. Recuperado de <http://www.slideshare.net/jmarmolejov/uso-de-las-tic-en-la-enseanza-de-lasmaticas>
- Minedu (2007). Fascículo Aspectos metodológicos en el aprendizaje del álgebra en secundaria. Lima.
- Minedu. (2015). Fascículo Aspectos metodológicos en el aprendizaje de los sistemas de números naturales, enteros, racionales y reales. Lima.

- Ministerio de Educación del Perú (s.f). *Orientaciones para la programación curricular*. Recuperado de <http://ebr.minedu.gob.pe/des/pdfs/matematica/mateprogramacion.pdf>
- Ministerio de Educación del Perú. (2015). Rutas de Aprendizaje. Matemática. VII Ciclo. Lima Perú.
- Ministerio de Educación del Perú. (2015). Rutas del Aprendizaje VII Ciclo ¿Qué y cómo aprenden nuestros estudiantes? Área Curricular de Matemática 3°,4° y 5° grados de Educación Secundaria. Recuperado <http://www.minedu.gob.pe/rutas-del-aprendizaje/documentos/Secundaria/Matemática VII.pdf>
- Otero, A. (2011). Las TIC para el logro de un aprendizaje significativo de la matemática. Recuperado de <http://www.monografias.com/trabajos68/tics-logro-aprendizaje-significativo-matematica/ticslogro-aprendizaje-significativo-matematica.shtml>.
- Parra, O. & Díaz, V. (2014). Didáctica de la Matemáticas y las Tecnologías de la Información y la Comunicación. *Revista Educación y Desarrollo Social*. 8 (2), 60-81.
- Prieto, J. (2016). GeoGebra en diferentes escenarios de actuación. *Revista CLIC: Conocimiento Libre y Licenciamiento*. 7 (14), pp. 9-23.
- Radford, L. (2017). Ser, subjetividad y alienación. In B. D'Amore & L. Radford (Eds.). *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Problemas semióticos, epistemológicos y prácticos* (1st ed., pp. 137–165). Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.
- Real, M. (s.f.). *Las TIC en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas*. *Jornadas de Innovación docente*. Facultad de Matemáticas. Universidad de Sevilla. Recuperado de [https://personal.us.es/suarez/ficheros/tic\\_matematicas.pdf](https://personal.us.es/suarez/ficheros/tic_matematicas.pdf)
- Rivas, M. (2000). Innovación educativa. *Teoría, procesos y estrategias*. Madrid: Síntesis.
- Rodríguez, A., Nieto, E., y Sumozas, R. (2016). *Las tecnologías en educación. Hacia la calidad educativa*. Madrid: Editorial Síntesis S.A.
- Ruiz, A. (s.f.). *Aprendizaje de las matemáticas: Conceptos, procedimientos, lecciones y resolución de problemas*. Recuperado <http://www.centroedumatematica.com/aruz/libros/Uniciencia/Articulos/Volumen2/Parte12/articulo22.html>





- Sánchez, I. (2017). *Las prácticas matemáticas en la elaboración de simuladores con GeoGebra*.  
Universidad del Zulia. Núcleo Maracaibo: Zulia, Venezuela.
- Santillana. (2016). *Matemática 5*. Lima: Perú.
- Squires, D. & Mc Dougall, A. (1997). *Cómo elegir y utilizar software educativo: guía para el profesorado*. Madrid: Ediciones Morata.
- UNESCO (2016). *Las TIC en la educación*. Recuperado  
<http://www.unesco.org/new/es/unesco/themes/icts/>
- Vásquez-Cano, E.; Sevillano, L. (2015). *Dispositivos digitales móviles en educación*. España:  
Editorial Narcea, S.A.
- Villa-Ochoa, J. A., Vélez, L., Rojas, C., y Borba, M. C. (2013). *Visualización de conceptos matemáticos: GeoGebra en la reorganización de los modos de producción de conocimiento matemático*. En E. Flórez y J. Hoyos (Eds.), *Una visión de las Ciencias Básicas. Modelación y Formación aplicada a casos reales* (pp. 65-80). Medellín: Sello Editorial Universidad de Medellín.

# **ANEXOS**

## Anexo 1: Matriz de Consistencia

PROBLEMA	OBJETIVOS	HIPÓTESIS	VARIABLES	METODOLOGÍA
¿En qué medida el empleo de GeoGebra favorece la comprensión de los métodos de solución de problemas de sistemas de ecuaciones lineales en estudiantes del 5to grado del nivel secundario en la I.E. N° 1228 “Leoncio Prado” de Ate, Lima, ¿2018?	Determinar en qué medida el empleo de GeoGebra favorece la comprensión de los métodos de solución de problemas de sistemas de ecuaciones lineales en estudiantes del 5to grado del nivel secundario en la I.E. N° 1228 “Leoncio Prado” de Ate, Lima, 2018.	El empleo de GeoGebra favorece significativamente la comprensión de los métodos de solución de problemas de sistemas de ecuaciones lineales en los estudiantes del 5º grado del nivel secundario en la I.E. N° 1228 “Leoncio Prado” de Ate, Lima, 2018	<b>V. Independiente.</b> X: Aplicación del GeoGebra	<b>Tipo de investigación:</b> Explicativa  <b>Diseño de investigación:</b> Experimental, de tipo Cuasi experimental. Con dos grupos: control y experimental.  <b>Población:</b> Escolares del 5to grado de secundaria de la IE N°1228  <b>Muestra:</b> No probabilística Grupo experimental: 28 alumnos del 5º A Grupo control: 28 alumnos del 5ºB  <b>Instrumento:</b> Prueba de Evaluación
1) ¿En qué medida el empleo de GeoGebra favorece la comprensión del método de reducción en la solución de problemas de sistemas de ecuaciones lineales en estudiantes del 5to grado del nivel secundario en la I.E. N° 1228 “Leoncio Prado” de Ate, Lima, ¿2018?	1) Determinar en qué medida el empleo de GeoGebra favorece la comprensión del método de reducción en la solución de problemas de sistemas de ecuaciones lineales en estudiantes del 5to grado del nivel secundario en la I.E. N° 1228 “Leoncio Prado” de Ate, Lima, 2018.	1) El empleo del GeoGebra favorece significativamente la comprensión del método de reducción en la solución de sistemas de ecuaciones lineales en los estudiantes del 5º grado del nivel secundario en la I.E. N° 1228 “Leoncio Prado” de Ate, Lima, 2018.		

<p>2) ¿En qué medida el empleo de GeoGebra favorece la comprensión del método de sustitución en la de solución de problemas de sistemas de ecuaciones lineales en estudiantes del 5to grado del nivel secundario en la I.E. N° 1228 “Leoncio Prado” de Ate, Lima, ¿2018?</p>	<p>2) Determinar en qué medida el empleo de GeoGebra favorece la comprensión del método de sustitución en la solución de problemas de sistemas de ecuaciones lineales en estudiantes del 5to grado del nivel secundario en la I.E. N° 1228 “Leoncio Prado” de Ate, Lima, 2018.</p>	<p>2)El empleo del GeoGebra favorece significativamente en la comprensión del método de sustitución en la solución de sistemas de ecuaciones lineales en los estudiantes del 5º grado del nivel secundario de la I.E. N° 1228 “Leoncio Prado” de Ate, Lima, 2018</p>	<p><b>V. Dependiente.</b> Y: Métodos de solución de problemas para sistemas de ecuaciones lineales</p>	
<p>3) ¿En qué medida el empleo de GeoGebra favorece la comprensión del método de igualación en la de solución de problemas de sistemas de ecuaciones lineales en estudiantes del 5to grado del nivel secundario en la I.E. N° 1228 “Leoncio Prado” de Ate, Lima, ¿2018?</p>	<p>3) Determinar en qué medida el empleo de GeoGebra favorece la comprensión del método de igualación en la solución de problemas de sistemas de ecuaciones lineales en estudiantes del 5to grado del nivel secundario en la I.E. N° 1228 “Leoncio Prado” de Ate, Lima, 2018.</p>	<p>3) El empleo del GeoGebra favorece significativamente en la comprensión del método de igualación en la solución de sistemas de ecuaciones lineales en los estudiantes del 5º grado del nivel secundario de la I.E. N° 1228 “Leoncio Prado” de Ate, Lima, 2018.</p>		

**Anexo 2: Instrumentos para la recolección de datos**

**LISTA DE COTEJO  
CON APLICACIÓN DEL GEOGEBRA**

Área : Matemática

Docente : Ana Clemencia Cordova Espinoza

<b>LISTA DE COTEJO: Grupo Experimental</b>						
N° de orden estudiante	ÍTEMS (4 puntos cada uno)					PUNTAJE
	Ítem 1	Ítem 2	Ítem 3	Ítem 4	Ítem 5	
	Realizado	Realizado	Realizado	Realizado	Realizado	
1						
2						
3						
4						
5						
6						
7						
8						
9						
10						
11						
12						
13						
14						
15						
16						
17						
18						
19						
20						
21						
22						
23						
24						
25						
26						
27						
28						

## LEYENDA DE ÍTEMS

### LISTA DE COTEJO: Grupo Experimental

#### Con aplicación del GeoGebra

Ítem 1: Comprende el problema e identifica las variables del problema. Reconoce los comandos a utilizar en el software GeoGebra.

Ítem 2: Plantea el sistema de ecuaciones e introduce los sistemas de ecuaciones en el campo de entrada del GeoGebra.

Ítem 3: Resuelve el sistema de ecuaciones aplicando el método de solución indicado en la sesión y usa de manera adecuada el software para visualizar la gráfica del sistema de ecuaciones e identificar la solución del problema.

Ítem 4: Explica y justifica sus resultados de los problemas resueltos al observar la gráfica y las coordenadas del conjunto solución en la ventana gráfica del GeoGebra.

Ítem 5: Realiza la metacognición de los procesos aplicados para resolver problemas de sistema de ecuaciones mediante el GeoGebra

**LISTA DE COTEJO**  
**SIN APLICACIÓN DEL GEOGEBRA**

Área : Matemática

Docente : Ana Clemencia Cordova Espinoza

<b>LISTA DE COTEJO: Grupo Control</b>						
N° de orden estudiante	ÍTEMS (4 puntos cada uno)					PUNTAJE
	Ítem 1	Ítem 2	Ítem 3	Ítem 4	Ítem 5	
	Realizado	Realizado	Realizado	Realizado	Realizado	
1						
2						
3						
4						
5						
6						
7						
8						
9						
10						
11						
12						
13						
14						
15						
16						
17						
18						
19						
20						
21						
22						
23						
24						
25						
26						
27						
28						



## **LISTA DE COTEJO: Grupo Control**

### **Sin aplicación del GeoGebra**

Ítem 1: Comprende el problema e identifica las variables en el problema propuesto en su cuaderno.

Ítem 2: Plantea el sistema de ecuaciones.

Ítem 3: Resuelve el sistema de ecuaciones aplicando el método de solución indicado en la sesión.

Ítem 4: Expone y justifica los resultados obtenidos en su papelote.

Ítem 5: Realiza la metacognición de los procesos aplicados para resolver un sistema de ecuaciones empleando su papelote o cuaderno.

## PRUEBA DE EVALUACIÓN

I.E. LEONCIO PRADO N°1228 – ATE

PRETEST – POSTEST

APELLIDOS Y NOMBRES: ..... GRADO. 5° Secundaria

**OBJETIVO:** Identificar en los estudiantes fortalezas y debilidades previos a la enseñanza de los sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas

1. Laura y Wilson pasean por las calles de la ciudad de Satipo. Durante su recorrido, visitan el mercado San Pedro. Allí, Laura compra 6 kg de café orgánico y 3 kg de azúcar, por lo cual paga S/. 156, mientras que Wilson compra 1kg de café orgánico y 10 kg de azúcar, por lo cual paga S/.83.

Se plantea utilizando el método de reducción, decide eliminar “x”, para ello multiplica la segunda ecuación por -6.

$$x \cdot (-6) \quad \begin{cases} 6x + 3y = 156 \\ x + 10y = 83 \end{cases} \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} 6x + 3y = 156 \\ -6x - 60y = -498 \end{cases}$$

Quedando reducido a  $-57y = -342$ , donde  $y = 6$ , luego reemplazando en la primera ecuación:

$$6x + 3(6) = 156, \text{ resolviendo } x = 23$$

Finalmente dice que cada kg de café orgánico costó S/. 23 y cada kg de azúcar costo S/. 6 soles

¿Es correcto la respuesta de Laura? Explique por qué.

2. Los baños termales de Monterrey se encuentran a 7km de la ciudad de Huaraz y se caracterizan porque tienen sus aguas incoloras con temperaturas de 49 °C. El Sr. Gómez y su esposa viajan con sus dos hijas a la ciudad de Huaraz y dicen visitar a los baños termales de la zona.

Llegado al lugar, una familia le comenta que para ingresar a la piscina pagó S/.29 por 3 adultos y 2 niños. Otro joven les dijo que pagó S/.26 soles por 2 adultos y 3 niños. La familia Gómez desea saber cuánto pagará por el ingreso a la piscina con toda su familia.

Tenemos que “x” representa a las entradas de adulto, “y” representa a las entradas de niños.

Planteando las ecuaciones, tenemos:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 29 \\ 2x + 3y = 26 \end{cases}$$

Él decide que para resolver el sistema usará el método de sustitución. Para ello, despeja “y” en la primera ecuación, obteniendo:  $y = 29 - 3x/2$  Sustituye en la segunda ecuación el valor de “y”

$$\text{Obteniéndose, } 2x + 3(29 - 3x) / 2 = 26$$

Desarrolla, ésta última ecuación, y obtiene el valor de “x”:  $x = 7$

Luego, siguiendo el proceso sustituye  $x = 7$  en:  $y = 29 - 3x/2$ , obteniendo  $y$

$=4$ . Para comprobar, sustituye los valores obtenidos de x e y en una de las dos

ecuaciones y verifica que cumple para las dos ecuaciones.

Concluyendo que el conjunto solución es: c.s = {(7;4)}

Después de realizar estos cálculos, el Sr. Gómez concluye que debería pagar S/ 4 soles por adulto y S/. 7 por niño. Es correcto lo que dice el Sr. Gómez. Explica por qué.

3. La abuelita Victoria decide premiar el cumplimiento de las tareas de sus nietos llevándolos al cine durante sus dos semanas de estadía. La primera semana pagó S/. 39 soles por 2 adultos y un niño, y la segunda vez pagó S/.47 soles por un adulto y 3 niños. ¿Cuánto costo las entradas para niños y adulto?, ¿Es correcto el vuelto recibido? El nieto mayor plantea la ecuación: Siendo “x” costo entrada de adulto y, “y” costo entrada de niño.

$$\begin{cases} 2x + y = 39 \\ x + 3y = 47 \end{cases}$$

En su proceso de resolución del sistema planteado, decide utilizar el método de igualación, y despeja la variable “x”.

Escribe:  $2x = 39 - y$  ;  $x = 47 - 3y$

Luego, iguala los valores obtenidos de “y”:  $39 - y/2 = 47 - 3y$ , obtiene que  $y = 11$ , Para hallar “x” reemplaza “y” en la segunda ecuación, del siguiente modo:  $x$

$+ 3(11) = 47$ , por lo que tiene que,  $x = 14$

Luego de efectuar los procedimientos, concluye que la entrada de adulto es de S/. 14 soles y la entrada de niños es de S/.11 soles.

¿Lo que manifiesta el nieto mayor, será correcto? Explique por qué.

#### **Internet móvil**

En una localidad de Vitarte, se han presentado dos personas que representan a empresas que brindan el servicio de internet móvil, y presentan a los adultos con casa propia en la zona sus planes de internet móvil. “Internet Rápido” tiene el cobro de un costo fijo de 34 soles en el mes más 0,3 soles cada minuto que hable el usuario. “Contacto Virtual” sólo cobra 1,8 soles el minuto sin ningún tipo de costo mensual.

De las propuestas en “Internet móvil” analiza y marca la opción correcta.

4. Para modelar esta situación con la aplicación de un sistema de dos ecuaciones. ¿Cuál de las siguientes sería la opción correcta?
- a)  $y = 34 + 0,3x$  ;  $y = 1,8x$  , donde “x” los minutos e “y” el pago del mes.
  - b)  $y = 34 + 0,3x$  ;  $y = 1,8x$  , donde “y” los minutos y “x” el pago del mes.
  - c)  $y = 34x + 0,3$ ;  $y = 1,8x$  , donde “x” los minutos e “y” el pago del mes.
  - d)  $34 + 0,3x = 1,8x$  , donde “x” los minutos.
5. Doña Teresa encomienda a su hija María que vaya de compras al mercado mayorista por dos días seguidos. Luego de algunos días, doña Teresa le preguntó a su hija cuánto costó cada piña y cada papaya. María le dice que solo se acuerda que el primer día gastó 7,60 soles en total en comprar 2 piñas y 4 papayas; y que el segundo día gastó 5,5 soles por la compra de 5 piñas y 1 papaya. ¿Cuánto costó cada piña y cada papaya?
- a) Piña: 1,00 soles Papaya: 1,00 soles
  - b) Piña: 0,80 soles Papaya: 1,5 soles

- c) Piña: 1,5 soles Papaya: 0,80 soles
- d) Piña: 2, 5 soles Papaya: 1,50 soles

6. Noelia heredó un terreno que tiene forma de un rectángulo, cuya área es de  $750 \text{ m}^2$ . Como necesitaba cercarlo, utilizó 110m de alambre con púas para el cerco, se presentan varias propuestas para representar la información presentada

¿cuál de los siguientes sistemas, es la correcta?

$$\text{a) } \begin{cases} x + y = 110 \\ x \cdot y = 750 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} 2x + 2y = 750 \\ \frac{x \cdot y}{2} = 750 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x + y = 110 \\ x + y = 55 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} 2x \cdot 2y = 750 \\ x \cdot y = 750 \end{cases}$$

7. Si tenemos que la suma de los lados de un rectángulo es 48 cm. Si restamos el largo y el ancho se obtiene 2 cm. Calcular el área. Usa el método de reducción.

- a)  $35 \text{ cm}^2$
- b)  $12 \text{ cm}^2$
- c)  $26 \text{ cm}^2$
- d)  $48 \text{ cm}^2$

8. María y su primo han terminado el segundo bimestre satisfactoriamente. Por ello sus tíos los han premiado llevándolos al zoológico de Huachipa. Allí observaron muchos animales de la costa, sierra y selva del Perú, pero fueron los pavos reales y los monos. Decidiendo contar cuántos había de esos animales.

En el camino de regreso, se acordaron de que habían contado 50 cabezas de animales y 134 patas, ¿Cuántos pavos reales y cuántos monos observaron? Usa el método de reducción.

- a) 17 monos y 33 pavos reales.
- b) 21 monos y 29 pavos reales.
- c) 18 monos y 32 pavos reales

## Sesión 2. Aprendizaje utilizando GeoGebra


### I. DATOS INFORMATIVOS:

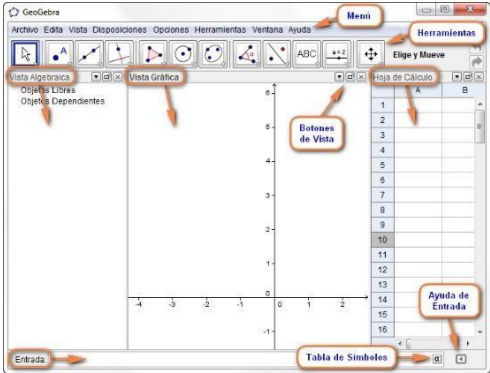
- 1.1 **Título de la sesión** : Introducción al GeoGebra y ecuaciones equivalentes  
 1.2 **Docente** : CORDOVA ESPINOZA Ana C.  
 1.3 **Tiempo** : 3 horas pedagógicas  
 1.4 **Fecha** : 5 de noviembre del 2018

### II. SECUENCIA DIDÁCTICA

COMPETENCIA	CAPACIDAD	INDICADOR
Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio	Elabora y usa estrategias	Explica e identifica las formas de obtención de sistemas de ecuaciones equivalentes y las herramientas del GeoGebra para la gráfica del sistema de ecuaciones.

### III. APRENDIZAJE ESPERADO

MOMENTOS	ESTRATEGIA	RECURSOS	TIEMPO
INICIO	<p>Los alumnos ingresan al laboratorio en compañía del Docente y observar el icono del GeoGebra.</p>  <p>La Docente pregunta ¿para qué se utiliza dicho programa? ¿Alguna vez han escuchado de dicho programa?. Exploran los elementos del software:</p>	Laboratorio de Cómputo	<p>5 min</p> <p>10 min</p>

	 <p>La docente presenta una situación cotidiana de la vida, identifica variables, plantea el sistema de ecuaciones. Ejecuta con ellos la obtención de sistema equivalentes. Los estudiantes identifican en la hoja 1 sistema equivalente y la forma de cómo obtenerlas.</p>		
DESARROLLO	<p>Luego de que los estudiantes dan sus respuestas, se les solicita ingresar al programa para observar sus herramientas.</p> <p>Luego la docente, ingresa un sistema de ecuaciones en el proyector como ejemplo para todos, realiza dos ejemplos más. Luego los estudiantes aplican los procesos con los sistemas propuestos</p> <p>ESCRIBIR MODELOS SISTEMAS.</p>	Laboratorio de Cómputo	90 min
CIERRE	<p>Se formulan las siguientes preguntas a los estudiantes:</p> <p>¿Qué aprendiste hoy?</p> <p>¿Cómo obtienes el conjunto solución del sistema de ecuaciones con GeoGebra?</p> <p>¿Qué dificultades tuviste para realizar las actividades propuestas?</p> <p>Los estudiantes cierran el programa</p>	Ficha de Metacognición	30 min

#### IV. EVALUACIÓN

CAPACIDAD	INDICADOR
Comunica su comprensión sobre las herramientas del GeoGebra	Explica las formas de uso de las herramientas del GeoGebra.

Vitarte, noviembre del 2018

## Sesión de aprendizaje sin utilizar GeoGebra

### I. APRENDIZAJE ESPERADO

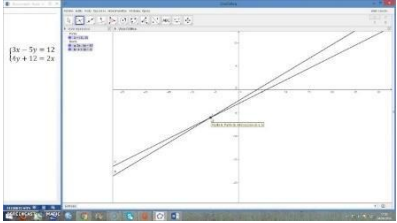
- **Título de la sesión** : Resolvemos problemas con el método de reducción
- **Docente** : CORDOVA ESPINOZA Ana C.
- **Fecha** : noviembre 2018
- **Tiempo** : 3 horas pedagógicas

### II. DATOS INFORMATIVOS:

COMPETENCIA	CAPACIDAD	INDICADOR
Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio	Elabora y usa estrategias	Usa comandos para hallar los valores de “x” e “y” en las ecuaciones mediante la sustitución con el uso del software GeoGebra.

### III. SECUENCIA DIDÁCTICA

MOMENTOS	ESTRATEGIA	RECURSOS	TIEMPO
INICIO	<p>La docente ingresa al aula, saluda a los estudiantes. La docente plantea una situación problemática en la pizarra planteando el sistema de ecuaciones ingresan al laboratorio en compañía</p> $X+6=15$ <p>Los estudiantes responden, levantando la mano para su participación.</p>	Laboratorio de Cómputo	5 min  10 min
DESARROLLO	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Se les pide a los estudiantes que hallen en su cuaderno de trabajo, por el método de sustitución el valor de las siguientes incógnitas.           <math display="block">\begin{cases} 2x + 5y = 29 \\ x + y = 10 \end{cases}</math> <math display="block">\begin{cases} 2x + 5y = 29 \\ x + y = 10 \end{cases}</math> </li> <li>• La docente monitorea el desarrollo de sus resultados, luego de la verificación de las</li> </ul>	Laboratorio de Cómputo  Hoja de Práctica	90 min

	<p>incógnitas, los docentes enseñan el ingreso de los comandos al software para que hallen el valor de las incógnitas de una manera más sencilla, presionando al final “shift + enter” para que den los valores de “x” e “y”</p> <p style="text-align: center;"><b>ITEM 01</b></p> <p>Una vez hallado los valores de “x” e “y” hallemos lo que nos piden en el ejercicio</p> <p>La docente pide a los estudiantes que comparen sus respuestas con sus compañeros de lado.</p> <div style="text-align: center;">  </div> <p>Los estudiantes tendrán que resolver el ítem 09 , y los 5 primeros que lo resuelvan tendrán un punto más.</p>		
CIERRE	<p>Se formulan las siguientes preguntas a los estudiantes:</p> <p>¿Qué aprendiste hoy?</p> <p>¿Cómo obtienes el conjunto solución del sistema de ecuaciones con GeoGebra?</p> <p>¿Qué dificultades tuviste para realizar las actividades propuestas?</p> <p>Los estudiantes cierran el programa</p>	Ficha de Metacognición	30 min

#### IV. EVALUACIÓN

CAPACIDAD	INDICADOR
Comunica su comprensión sobre las herramientas del GeoGebra	Explica las formas de uso de las herramientas del GeoGebra.

Vitarte, noviembre del 2018