REPOSITORIO ACADEMICO USMP

INSTITUTO PARA LA CALIDAD DE EDUCACIÓN
SECCIÓN DE POSGRADO

LA REALIDAD AUMENTADA COMO HERRAMIENTA INTERACTIVA PARA EL APRENDIZAJE DE LAS APLICACIONES DE LA INTEGRAL DEFINIDA EN ESTUDIANTES DE LA CARRERA DE ARQUITECTURA DE LA UNIVERSIDAD PERUANA DE CIENCIAS APLICADAS

PRESENTADO POR
MARLENNY ROJAS BARRIOS

ASESOR
DR. ÁNGEL RAMÓN VELÁZQUEZ FERNÁNDEZ

TESIS
PARA OPTAR EL GRADO ACADÉMICO DE DOCTORA EN EDUCACIÓN

LIMA – PERÚ
2024

CC BY-NC-ND
Reconocimiento – No comercial – Sin obra derivada
El autor sólo permite que se pueda descargar esta obra y compartirla con otras personas, siempre que se reconozca su autoría, pero no se puede cambiar de ninguna manera ni se puede utilizar comercialmente.
http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/

INSTITUTO PARA LA CALIDAD DE LA EDUCACIÓN

SECCIÓN DE POSGRADO

LA REALIDAD AUMENTADA COMO HERRAMIENTA INTERACTIVA PARA EL APRENDIZAJE DE LAS APLICACIONES DE LA INTEGRAL DEFINIDA EN ESTUDIANTES DE LA CARRERA DE ARQUITECTURA DE LA UNIVERSIDAD PERUANA DE CIENCIAS APLICADAS

TESIS PARA OPTAR

EL GRADO ACADÉMICO DE DOCTORA EN EDUCACIÓN

PRESENTADO POR:

MARLENNY ROJAS BARRIOS

ASESOR:

DR. ÁNGEL RAMÓN VELÁZQUEZ FERNÁNDEZ

LIMA, PERÚ

2024

LA REALIDAD AUMENTADA COMO HERRAMIENTA INTERACTIVA PARA EL APRENDIZAJE DE LAS APLICACIONES DE LA INTEGRAL DEFINIDA EN ESTUDIANTES DE LA CARRERA DE ARQUITECTURA DE LA UNIVERSIDAD PERUANA DE CIENCIAS APLICADAS

ASESOR Y MIEMBROS DEL JURADO

ASESOR:

Dr. Ángel Ramón Velázquez Fernández

PRESIDENTE DEL JURADO:

Dr. Vicente Justo Pastor Santivañez Limas

MIEMBROS DEL JURADO

Dr. Alejandra Dulvina Romero Díaz

Dr. Oscar Rubén Silva Neyra

DEDICATORIA

A Dios por ser mi fortaleza y a mis padres Ceferina y Domingo, por el amor y apoyo que me brindan.

AGRADECIMIENTOS

A mi asesor, Dr. Ángel Ramón Velázquez Fernández quien, con su experiencia y conocimiento, permitió el desarrollo de la presente investigación.

A cada uno de los profesores del doctorado por la enseñanza impartida y aportar a mi formación profesional.

ÍNDICE

ASESOR Y MIEMBROS DEL JURADO ... iii

DEDICATORIA ... iv

AGRADECIMIENTOS ... v

ÍNDICE ... vi

RESUMEN ... ix

ABSTRACT ... x

REPORTE DE SIMILITUD ... xi

DECLARACIÓN JURADA ... xii

INTRODUCCIÓN ... 1

CAPÍTULO I: MARCO TEÓRICO ... 9

1.1. Antecedentes de la Investigación ... 9

1.2. Bases Teóricas ... 13

1.3. Definición de Términos Básicos ... 37

CAPÍTULO II: HIPÓTESIS Y VARIABLES ... 42

2.1. Formulación de Hipótesis Principal y Derivadas ... 42

2.2. Variables y Definición Operacional ... 43

CAPÍTULO III: METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN ... 45

3.1. Diseño Metodológico ... 45

3.2. Diseño Muestral ... 46

3.3. Técnicas de Recolección de Datos ... 47

3.4. Técnicas Estadísticas para el Procesamiento de Información ... 48

3.5. Aspectos Éticos ... 48

CAPÍTULO IV: RESULTADOS ... 50

CAPÍTULO V: DISCUSIÓN **69**

CONCLUSIONES **74**

RECOMENDACIONES **76**

FUENTES DE INFORMACIÓN **77**

ANEXOS **87**

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1 Capacidades de acuerdo con el Nivel de Estudio 34

Tabla 2 Definición Operacional de la Variable Independiente 44

Tabla 3 Definición Operacional de la Variable Dependiente 44

Tabla 4 Grupo de Control y Grupo Experimental 46

Tabla 5 Validez del Instrumento 47

Tabla 6 Escala de Calificaciones 52

Tabla 7 Resultados de Notas de la Capacidad 1 52

Tabla 8 Resultados de Notas de la Capacidad 2 53

Tabla 9 Resultados de Notas de la Capacidad 3 54

Tabla 10 Resultados de Notas de la Capacidad 4 55

Tabla 11 Resultados de Notas de la Capacidad 5 56

Tabla 12 Resultados de Prueba de Normalidad de Shapiro – Wilk – Grupo Experimental 57

Tabla 13 Resultados de Prueba de Normalidad de Shapiro – Wilk – Grupo Control58

Tabla 14 Mann Whitney – Capacidad 1 60

Tabla 15 Mann Whitney – Capacidad 2 62

Tabla 16 Mann Whitney – Capacidad 3 64

Tabla 17 Mann Whitney – Capacidad 4 66

Tabla 18 Mann Whitney – Capacidad 5 68

RESUMEN

La investigación tuvo como objetivo determinar la influencia de la aplicación de la tecnología "realidad aumentada", como herramienta interactiva para la mejora del aprendizaje de las aplicaciones de la integral definida en estudiantes de la carrera de Arquitectura de la Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas. Se empleó una metodología de tipo aplicada, con un enfoque cuantitativo de nivel cuasiexperimental y un diseño experimental. La muestra fue no probabilística e intencional, conformada por 42 estudiantes del tercer ciclo de la carrera de Arquitectura de la Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas. El grupo control estuvo compuesto por 21 estudiantes, mientras que el grupo experimental incluyó a 21 estudiantes. En el grupo experimental se implementó una propuesta didáctica, mientras que el grupo de control no recibió ninguna intervención. Para evaluar los efectos de la propuesta, se aplicó un examen antes y después de la implementación de la estrategia didáctica. Se concluyó que el uso de la propuesta didáctica basada en la tecnología, realidad aumentada, influyó significativamente en la mejora del desarrollo de las capacidades de interpretar, representar, calcular, analizar y explicar en los estudiantes.

Palabras clave: Realidad aumentada; Integral definida; Sólidos por secciones planas; Sólidos de revolución.

ABSTRACT

The purpose of this thesis is to determine the influence of the application of augmented reality as an interactive tool to improve the learning of the applications of the definite integral in students of the Architecture program at the Peruvian University of Applied Sciences. In research, learning is considered as the level of development of the capabilities to interpret information based on different formats, mathematically represent situations based on the information provided, perform mathematical operations using algorithms, analyze the results obtained from the application of methods. mathematicians and explain the conclusions of their reasoning. In this research, two groups were established, called the experimental group and the control group. The objective of the experiment was to implement a didactic proposal in the experimental group, while the control group did not receive any intervention. In order to evaluate the effects of the proposal, an exam was applied before and after implementation of the teaching strategy. It is concluded that the use of the didactic proposal based on augmented reality significantly influenced the improvement of the development of the students' abilities to interpret, represent, calculate, analyze and explain.

Keywords: Augmented reality; Definite integral; Solids by cross-sections; Solids of revolution.

REPORTE DE SIMILITUD

Reporte de similitud

NOMBRE DEL TRABAJO

LA REALIDAD AUMENTADA COMO HERR AMIENTA INTERACTIVA PARA EL APRE NDIZAJE DE LAS APLICACIONES DE LA I NT

AUTOR

MARLENNY ROJAS BARRIOS

RECUENTO DE PALABRAS

22362 Words

RECUENTO DE CARACTERES

119191 Characters

RECUENTO DE PÁGINAS

125 Pages

TAMAÑO DEL ARCHIVO

47.3MB

FECHA DE ENTREGA

Apr 14, 2024 9:07 PM GMT-5

FECHA DEL INFORME

Apr 14, 2024 9:09 PM GMT-5

20% de similitud general

El total combinado de todas las coincidencias, incluidas las fuentes superpuestas, para cada base de datos.

- 20% Base de datos de Internet
- Base de datos de Crossref
- 4% Base de datos de publicaciones
- Base de datos de contenido publicado de Crossref

Excluir del Reporte de Similitud

- Base de datos de trabajos entregados
- Material citado
- Coincidencia baja (menos de 10 palabras)
- Material bibliográfico
- Material citado
- Fuentes excluidas manualmente

Resumen

DECLARACIÓN JURADA

Yo, MARLENNY ROJAS BARRIOS, estudiante del instituto para la Calidad de la Educación USMP(Virtual) de la Universidad de San Martín de Porres DECLARO BAJO JURAMENTO que todos los datos e información que acompañan a la Tesis o Trabajo de Investigación titulado “LA REALIDAD AUMENTADA COMO HERRAMIENTA INTERACTIVA PARA EL APRENDIZAJE DE LAS APLICACIONES DE LA INTEGRAL DEFINIDA EN ESTUDIANTES DE LA CARRERA DE ARQUITECTURA DE LA UNIVERSIDAD PERUANA DE CIENCIAS APLICADAS “:

1. Son de mi autoría
2. El presente Trabajo de Investigación / Tesis no ha sido plagiado ni total,ni parcialmente.
3. El Trabajo de Investigación / Tesis no ha sido publicado ni presentado anteriormente.
4. Los resultados de la investigación son verídicos. No han sido falsificados, duplicados, copiados, ni adulterados.

De identificarse alguna de las irregularidades señaladas en la presente declaración jurada; asumo las consecuencias y las sanciones a que dieran lugar, sometiéndome a las autoridades pertinentes.

Lima, 20 de abril de 2024

....

Firma del Estudiante

DNI: 41054673

INTRODUCCIÓN

La visualización espacial es una capacidad fundamental para interpretar y comprender objetos en tres dimensiones, siendo clave en disciplinas como ingeniería, arquitectura y matemáticas. Estas habilidades permiten realizar tareas como concebir modelos espaciales, interpretar diagramas, resolver conflictos geométricos y describir con precisión propiedades tridimensionales. Sin embargo, a nivel global, se ha identificado una brecha en la formación de estas habilidades debido a metodologías de enseñanza tradicionales, que muchas veces se limitan a representaciones estáticas y bidimensionales. Esto impacta directamente en áreas de aprendizaje relacionadas con el cálculo diferencial e integral aplicado al análisis de sólidos tridimensionales.

En países avanzados en educación, como Estados Unidos y Finlandia, se han integrado herramientas tecnológicas como software de visualización tridimensional y realidad aumentada para potenciar la comprensión espacial. Estas herramientas permiten una interacción directa con objetos 3D, mejorando la capacidad de los estudiantes para comprender conceptos complejos como el cálculo del volumen de sólidos por métodos analíticos y geométricos. Sin embargo, su implementación no es uniforme, dejando brechas significativas en regiones en desarrollo (Caballero-Garriazo et al, 2023).

En Latinoamérica, las metodologías de enseñanza en asignaturas matemáticas aún dependen en gran medida de enfoques tradicionales. Por ejemplo, en Chile, la asignatura de Cálculo Multivariable en la Universidad del Desarrollo evidenció dificultades significativas entre los estudiantes para comprender conceptos relacionados con la visualización espacial. Estas deficiencias se hicieron evidentes al abordar temas avanzados como el cálculo del volumen de sólidos mediante métodos de secciones planas y sólidos de revolución. La limitada interacción con representaciones tridimensionales dinámicas fue uno de los factores principales que dificultó el aprendizaje (Herrera, 2020).

El cálculo de volúmenes de sólidos no conocidos requiere un proceso iterativo complejo. Inicialmente, el sólido S se corta en piezas y se aproxima cada pieza como un cilindro. A partir de una sección transversal plana obtenida al cortar el sólido con un plano, se generan las aproximaciones cilíndricas, cuyo volumen se suma para aproximar el volumen total del sólido. Este proceso, que implica un límite donde i ($i \to \infty$), permite alcanzar el volumen exacto, pero su comprensión y aplicación son altamente desafiantes sin apoyo visual y tecnológico adecuado (Vilca, 2017).

En la Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas, se identificaron dificultades en el aprendizaje de las aplicaciones de la integral definida, particularmente en el cálculo de volúmenes de sólidos. Estas dificultades evidenciaron la necesidad de contar con un conocimiento sólido del cálculo diferencial e integral, habilidades esenciales para determinar áreas y volúmenes de sólidos, pasando de fórmulas básicas a operaciones más complejas. No obstante, la enseñanza de estos conceptos presentó múltiples desafíos debido a la ausencia de herramientas tecnológicas que facilitaran su comprensión.

El análisis de temas geométricos que involucran gráficos en 3D representó un desafío significativo, especialmente al estudiar aplicaciones de la integral definida. Las deficiencias detectadas en los estudiantes incluyeron:

Falta de abstracción geométrica: Dificultad para visualizar los sólidos generados a partir de sus representaciones planas, lo que limita la comprensión de sus estructuras tridimensionales.

Problemas en la visualización de secciones planas: Escasa capacidad para identificar y analizar secciones paralelas al plano YZ, así como para determinar el orden correcto en el que deben integrarse las funciones involucradas.

Confusión en la aplicación de métodos específicos: Dificultades para reconocer y aplicar los métodos (arandela o disco), fundamentales para calcular volúmenes de sólidos de revolución.

Estas limitaciones subrayaron la necesidad de integrar herramientas tecnológicas, como software interactivo y realidad aumentada, que permitieran una visualización más intuitiva y dinámica de objetos tridimensionales. Esto facilitaría la comprensión de conceptos avanzados, mejorando tanto la experiencia de aprendizaje como el desempeño académico de los estudiantes.

Por ello, teniendo en consideración los aspectos mencionados, se identificó como problema principal el siguiente:

¿En qué medida la propuesta didáctica basada en el uso de la RA influye significativamente en el nivel del aprendizaje de las aplicaciones de la integral definida en estudiantes de la carrera de Arquitectura de la Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas?

Además, se presentó la siguiente lista de problemas específicos:

- ¿En qué medida la propuesta didáctica basada en el uso de la RA influye significativamente en el desarrollo de la capacidad de interpretar la información basada en diferentes formatos para el aprendizaje de las aplicaciones de la integral definida, en estudiantes de la carrera de Arquitectura de la Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas?

- ¿En qué medida la propuesta didáctica basada en el uso de la RA influye significativamente en el desarrollo de la capacidad de representar matemáticamente situaciones a partir de la información brindada para el aprendizaje de las aplicaciones de la integral definida, en estudiantes de la carrera de Arquitectura de la Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas?

- ¿En qué medida la propuesta didáctica basada en el uso de la RA influye significativamente en el desarrollo de la capacidad de efectuar operaciones matemáticas mediante algoritmos para el aprendizaje de las aplicaciones de la integral definida, en estudiantes de la carrera de Arquitectura de la Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas?

- ¿En qué medida la propuesta didáctica basada en el uso de la RA influye significativamente en el desarrollo de la capacidad de analizar los resultados obtenidos de la aplicación de métodos matemáticos para el aprendizaje de las aplicaciones de la integral definida, en estudiantes de la carrera de Arquitectura de la Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas?

- ¿En qué medida la propuesta didáctica basada en el uso de la RA influye significativamente en el desarrollo de la capacidad de explicar las conclusiones de su razonamiento para el aprendizaje de las aplicaciones de la integral definida, en estudiantes de la carrera de Arquitectura de la Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas?

En relación con el problema principal, se formuló el objetivo principal:

Evaluar la influencia de la propuesta didáctica basada en el uso de la RA en el nivel de aprendizaje de las aplicaciones de la integral definida en estudiantes de la carrera de Arquitectura de la Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas

De igual manera, se plantearon como objetivos específicos:

- Evaluar la influencia de la propuesta didáctica basada en el uso de la RA en el desarrollo de la capacidad de interpretar la información basada en diferentes formatos para el aprendizaje de las aplicaciones de la integral definida en estudiantes de la carrera de Arquitectura de la Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas.

- Evaluar la influencia de la propuesta didáctica basada en el uso de la RA en el desarrollo de la capacidad de representar matemáticamente situaciones a partir de la información brindada para el de aprendizaje de las aplicaciones de la integral definida en estudiantes de la carrera de Arquitectura de la Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas.

- Evaluar la influencia de la propuesta didáctica basada en el uso de la RA en el desarrollo de la capacidad de efectuar operaciones matemáticas mediante algoritmos para el aprendizaje de las aplicaciones de la integral definida en estudiantes de la carrera de Arquitectura de la Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas.
- Evaluar la influencia de la propuesta didáctica basada en el uso de la RA en el desarrollo de la capacidad de analizar los resultados obtenidos de la aplicación de métodos matemáticos para el de aprendizaje de las aplicaciones de la integral definida en estudiantes de la carrera de Arquitectura de la Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas.
- Evaluar la influencia de la propuesta didáctica basada en el uso de la RA en el desarrollo de la capacidad de explicar las conclusiones de su razonamiento para el aprendizaje de las aplicaciones de la integral definida en estudiantes de la carrera de Arquitectura de la Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas.

La hipótesis principal fue:

La aplicación de la propuesta didáctica basada en el uso de la RA como herramienta de apoyo, influye significativamente en el nivel de aprendizaje de las aplicaciones de la integral definida, en estudiantes de la carrera de Arquitectura de la Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas.

La investigación resultó relevante, ya que permitió analizar estrategias didácticas basadas en la tecnología, realidad aumentada, con el propósito de mejorar la visualización y exploración de los sólidos de revolución, así como de los sólidos generados por secciones planas paralelas al plano YZ y perpendiculares a la base del sólido, desde diversas perspectivas. A través de estas estrategias, se logró que los estudiantes superaran las dificultades previamente identificadas.

Cabe destacar que el desarrollo de la investigación estuvo condicionado por el tiempo disponible, delimitado por las horas asignadas por la institución para el tratamiento de los temas. A pesar de esta limitación, no se evidenció un impacto negativo en los resultados obtenidos, los cuales reflejaron la efectividad de las estrategias implementadas.

Se empleó una metodología de tipo aplicada, con un enfoque cuantitativo de nivel cuasiexperimental y un diseño experimental. La muestra fue no probabilística e intencional, conformada por 42 estudiantes del tercer ciclo de la carrera de Arquitectura de la Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas. El grupo control estuvo compuesto por 21 estudiantes, mientras que el grupo experimental incluyó a 21 estudiantes.

Finalmente, la investigación se estructuró en cinco capítulos. En el Capítulo I se presentó el marco teórico, que incluyó las principales nociones teóricas relacionadas con el tema. En el Capítulo II se abordaron las hipótesis (principal y derivadas), el sistema de variables y su definición operacional. El Capítulo III estuvo dedicado al desarrollo de la metodología de la investigación. En el Capítulo IV se expusieron los resultados y se detalló el procesamiento de la información. Por último, en el Capítulo V se plantearon las discusiones y conclusiones.

CAPÍTULO I: MARCO TEÓRICO

1.1. Antecedentes de la Investigación

Martín (2019), en su tesis titulada Aprendizaje transdisciplinar de las ciencias matemáticas mediado por la realidad aumentada, en programas de ingeniería, identificó el impacto de la tecnología, realidad aumentada (RA) como herramienta mediadora en el aprendizaje transdisciplinar de las ciencias matemáticas, específicamente en el desempeño académico de los estudiantes de pregrado de programas de ingeniería. El método empleado en la investigación fue el multimétodo (Tashakkori & Teddlie, 2003), que consistió en utilizar dos o más enfoques para indagar sobre un mismo fenómeno. En este caso, se aplicó un diseño experimental para comparar los tratamientos y un diseño descriptivo para describir la realidad en sus componentes principales. La fase cuasiexperimental permitió asignar a los sujetos al grupo experimental o al grupo de control. Se realizó una prueba inicial de la variable dependiente con ambos grupos, luego se aplicó el tratamiento de mediación pedagógica mediante RA al grupo experimental, mientras que el grupo de control no recibió el tratamiento. Finalmente, se realizó una prueba posterior de la variable dependiente en ambos grupos. Los resultados demostraron que la mediación mediante RA promovió espacios de aprendizaje transdisciplinar, evidenciados en las relaciones concepto-objeto, concepto-aplicación y concepto-situación generadas por los estudiantes. Además, el uso de RA resultó pertinente en el proceso de enseñanza-aprendizaje del curso de cálculo diferencial, facilitando el intercambio de información y la creación de entornos simulados mediante aplicaciones comunes y especializadas. Este enfoque favoreció la apropiación de conceptos como funciones, gráficas de funciones, dominios, rangos, máximos y mínimos, entre otros. Las pruebas estadísticas indicaron que la implementación de laboratorios de RA en el curso de cálculo diferencial resultó en un aumento estadísticamente significativo en el rendimiento académico de los estudiantes.

Cubillo (2014), en su tesis titulada Arle: Una herramienta de autor para entornos de aprendizaje de realidad aumentada, investigó cómo el sistema ARLE, con contenido basado en realidad aumentada (RA), podría servir como herramienta de apoyo en la enseñanza y el aprendizaje de los estudiantes de ingeniería electrónica. El sistema se dividió en dos componentes: ARLE como herramienta que incluye recursos en RA y ARLE como aplicación móvil. Se analizaron y compararon los resultados obtenidos por los estudiantes que utilizaron el entorno de aprendizaje ARLE (grupo experimental) con los de los estudiantes que no lo utilizaron (grupo de control). Para ello, los profesores evaluaron a los estudiantes mediante un examen. Los resultados del t-test mostraron una diferencia significativa entre ambos grupos, con una diferencia de 1.77 ($DIF=1.77$, $p<0.05$). A partir de este análisis, se concluyó que los estudiantes que utilizaron el sistema ARLE obtuvieron puntuaciones más altas que aquellos que siguieron los métodos tradicionales de enseñanza. Este resultado demostró que la aplicación de la RA facilitó el aprendizaje de los estudiantes de ingeniería electrónica.

Joo (2016), en su tesis titulada Modelo de realidad aumentada y navegación peatonal del patrimonio territorial: Diseño, implementación y evaluación educativa, llevó a cabo una investigación de enfoque mixto, en la que la sección cuantitativa presentó un diseño cuasiexperimental. Se aplicó un examen antes y después de realizar la intervención educativa a 145 estudiantes de 7° y 8° de Santiago de Chile y a 33 estudiantes de Salamanca (España). De este modo, la variable dependiente, el nivel de aprendizaje, se midió antes y después del uso de tabletas y ordenadores. El estudio demostró que el desarrollo de la inteligencia espacial se vio favorecido con la implementación de estas tecnologías en un contexto móvil, lo que permitió fortalecer la comprensión de las relaciones espaciales, la visualización y la orientación.

Morales (2022), en su tesis titulada Desarrollo de la inteligencia espacial a través de la realidad aumentada en áreas de conocimiento de *Science, Technology, Engineering and Mathematics* (STEM), investigó los efectos de la tecnología, realidad aumentada, en la mejora de las habilidades espaciales, la carga cognitiva y el aprendizaje en los estudiantes del área de Ciencia, Tecnología, Ingeniería y Matemáticas (CTIM), conocido en inglés por su acrónimo STEM. El enfoque de investigación se basó en un diseño cuasiexperimental, y se aplicaron dos modelos pretest-postest: uno para evaluar el nivel de habilidad espacial y otro para determinar el nivel de aprendizaje de las funciones matemáticas. Participaron 23 estudiantes en el grupo experimental y 25 en el grupo de control. El estudio demostró que los estudiantes aprendieron a generar funciones mediante la aplicación como alternativa al sistema de representación tradicional. Además, los estudiantes adquirieron habilidades para visualizar y analizar soluciones gráficas, y comprendieron la conceptualización de una función y la relación entre las variables. Finalmente, los estudiantes experimentaron de forma libre y autónoma con la aplicación GeoGebra y RA, compartiendo sus percepciones sobre las operaciones realizadas.

López (2022), en su tesis titulada realidad aumentada como andamiaje para la comprensión del concepto de función cuadrática en el nivel superior, investigó el impacto de la implementación de una secuencia didáctica con apoyo de la tecnología, realidad aumentada, en la comprensión de las funciones y gráficas cuadráticas en estudiantes del tercer nivel medio superior en una escuela de la Universidad Autónoma de Puebla. La metodología aplicada fue un análisis mixto, cuantitativo y cualitativo. La muestra estuvo compuesta por 131 estudiantes. Para la recolección de datos, se utilizó un pretest y postest conformado por 10 preguntas. Además, se implementó la secuencia didáctica durante cuatro sesiones de cien minutos cada una, y en la quinta sesión se aplicó el postest. El estudio demostró que los estudiantes presentaban dificultades en la abstracción, el tratamiento y la conversión de las funciones. En este contexto, la incorporación de la tecnología realidad aumentada en la secuencia didáctica sirvió como recurso de apoyo, facilitando el aprendizaje de los temas.

Gallegos (2018), en su tesis titulada Modelo para el análisis de aplicaciones visuales educativas en realidad aumentada desde la perspectiva de la semiótica visual, investigó cómo las aplicaciones de la tecnología realidad aumentada, orientadas a objetivos educativos, contribuyen al aprendizaje en un contexto real, facilitando la visualización e interacción con saberes pertinentes y significativos para dicho contexto. Se realizó una investigación cualitativa utilizando el método hermenéutico, basado en la teoría fundamentada por Strauss y Corbin (2002). Este enfoque se empleó como método de análisis cualitativo de los textos mediante la técnica de análisis documental. En esta investigación, se demostró que el modelo desarrollado, en lugar de limitarse a diagnosticar falencias, facilitó el mejoramiento de las experiencias de la tecnología realidad aumentada diseñadas para contextos educativos. Además, se evidenció que la convergencia de medios educativos permite visualizar escenarios de aprendizaje que pueden responder a las necesidades y demandas de la sociedad contemporánea.

1.2. Bases Teóricas

1.2.1. Enseñanzas y Aprendizaje

En el siglo XXI, las teorías de enseñanza y aprendizaje de la matemática han experimentado una notable evolución, especialmente con el auge de las tecnologías digitales y los enfoques pedagógicos innovadores. Este cambio ha sido impulsado por la necesidad de adaptar los métodos tradicionales de enseñanza a un mundo en el que la digitalización y el acceso a la información en tiempo real son cada vez más fundamentales. La incorporación de las tecnologías de la información y la comunicación (TIC) ha transformado la forma en que se enseñan las matemáticas, proporcionando nuevas herramientas que permiten a los educadores y estudiantes explorar formas más interactivas y participativas de aprendizaje. Estas herramientas, que incluyen desde plataformas virtuales de enseñanza hasta aplicaciones especializadas en matemáticas, facilitan el acceso a contenidos, promueven la colaboración y fomentan una mayor autonomía en los estudiantes.

En este contexto de innovación educativa, la enseñanza puede ser definida de diversas maneras, considerando tanto las perspectivas tradicionales como las contemporáneas, las cuales enfatizan el papel activo de los estudiantes con su propio proceso de aprendizaje.

La enseñanza se puede definir de diversas maneras:

Según Ausubel (1968), define la enseñanza como un proceso en el que se facilita el aprendizaje significativo, enfatizando la importancia de conectar la nueva información con los conocimientos previos del estudiante. En su obra "Educational Psychology: A Cognitive View", Ausubel sostiene que la enseñanza debe ser diseñada de tal manera que los estudiantes puedan relacionar el nuevo contenido con lo que ya saben, lo que permite una comprensión más profunda y duradera.

Según Shulman (1987), en su obra "Knowledge and Teaching: Foundations of the New Reform" define la enseñanza como un proceso planificado que no solo implica la transmisión de conocimientos, habilidades y valores a través de estrategias didácticas, sino que también requiere que los educadores comprendan profundamente el contenido que enseñan y cómo presentarlo de manera que sea accesible y significativo para los estudiantes.

Según la RAE, la enseñanza es la acción y efecto de enseñar, o el sistema y método para dar instrucción.

Según Bruner (1960), es un proceso que debe ser diseñado para facilitar el aprendizaje activo y significativo. En su obra "The Process of Education", Bruner enfatiza que la enseñanza debe centrarse en el desarrollo del pensamiento crítico y la comprensión profunda de los conceptos, en lugar de la memorización de hechos.

El objetivo de la enseñanza es ayudar a los estudiantes a construir su propio conocimiento a través de la exploración y la interacción con el material de aprendizaje

Según Caswell y Labrie (2017), la enseñanza es un proceso que debe involucrar la creación de un entorno de aprendizaje que fomente la exploración y la colaboración entre los estudiantes

Según Hidayati y Kurniati (2018), es un medio para desarrollar el pensamiento crítico en los estudiantes, especialmente en el contexto de la educación matemática.

En cuanto al aprendizaje puede ser conceptualizada desde diversas perspectivas.

Según Skinner (1953): definió el aprendizaje como un proceso de "condicionamiento" en un entorno de estímulo, recompensa y castigo en su obra "Science and Human Behavior". En este texto, Skinner expone su enfoque conductista, donde el aprendizaje se entiende a través de las interacciones entre el comportamiento y el entorno, enfatizando cómo los refuerzos y castigos influyen en la modificación del comportamiento.

Según Piaget (1966), define el aprendizaje como un proceso constructivo en el que los individuos adquieren conocimientos a través de la interacción activa con su entorno. El aprendizaje no es simplemente la recepción pasiva de información, sino que implica la construcción activa de significados y la organización de la información en estructuras cognitivas, que él denomina "esquemas"

Según Vygotsky (1934), en su obra más reconocida, "Pensamiento y lenguaje", sostiene que el aprendizaje es un proceso mediado que ocurre a través de la interacción con otros y que está profundamente influenciado por el contexto cultural y social en el que se desarrolla. El aprendizaje no es solo un proceso individual, sino que se produce en un marco social donde el lenguaje y las herramientas culturales juegan un papel crucial en la formación del pensamiento.

Según Aslam (2020), el aprendizaje implica la internalización de conceptos a través de la práctica y la reflexión.

Desde un enfoque educativo, la enseñanza y el aprendizaje están íntimamente relacionados porque prioriza la construcción del conocimiento y el desarrollo de habilidades.

Esto incluye el desarrollo de habilidades como el pensamiento crítico, la resolución de problemas y la creatividad, que son fundamentales en un mundo cada vez más complejo y tecnológico Soto (2024). La implementación de metodologías activas y el aprendizaje basado en proyectos son estrategias que han ganado popularidad en la enseñanza de las matemáticas. Estas metodologías no solo fomentan un aprendizaje más profundo, sino que también ayudan a los estudiantes a aplicar conceptos matemáticos a situaciones del mundo real, lo que es crucial para su desarrollo profesional (Boateng et al., 2022; Akçay et al., 2022). Por ejemplo, el enfoque STEM (Ciencia, Tecnología, Ingeniería y Matemáticas) se ha convertido en un marco pedagógico importante que promueve la integración de estas disciplinas y el aprendizaje interdisciplinario, lo que permite a los estudiantes abordar problemas complejos desde múltiples perspectivas (Tiengyoo, 2024; Xu & Zhou, 2022). Además, la tecnología juega un papel fundamental en la enseñanza moderna de las matemáticas. La incorporación de herramientas digitales y plataformas de aprendizaje en línea ha transformado la forma en que se enseña y se aprende, facilitando un acceso más amplio a recursos educativos y promoviendo la colaboración entre estudiantes (Tuong et al., 2023; Temel, 2023).

A continuación, se muestra algunos representantes que defienden un enfoque que integra habilidades, metodologías activas y tecnológicas.

Según López (2018), los estudiantes universitarios han destacado que el uso de la tecnología no solo facilita las tareas rutinarias, sino que también les permite experimentar con diferentes métodos y enfoques. Esta percepción es respaldada por investigaciones que demuestran que la incorporación de la TIC mejora la comprensión de los conceptos matemáticos, lo que lleva a un aprendizaje más efectivo (González et al., 2021; Espinoza et al., 2021). En su investigación, López encontró que los estudiantes mostraron una actitud favorable hacia el uso de la tecnología, lo cual se atribuyó al modelo de formación matemática implementado en la Universidad de las Regiones Autónomas de la Costa Caribe Nicaragüense. Este modelo integra entornos informáticos como Maple, Matlab, GeoGebra, entre otros, y dispositivos tecnológicos como celulares con aplicaciones de cálculo y graficado. Además, fomenta el aprendizaje colaborativo a través de la plataforma Moodle, que facilita la interacción en foros, chats, cuestionarios y talleres, generando así una comunidad de aprendizaje más dinámica y comprometida.

Este enfoque reveló una transformación en la enseñanza de las matemáticas, impulsada por la necesidad de desarrollar nuevas habilidades en los estudiantes como competencias cognitivas, digitales, sociales y emocionales; esenciales para que los estudiantes puedan enfrentar los desafíos del mundo contemporáneo (Garay et al., 2023; Pozo et al., 2023). La gamificación, por ejemplo, ha surgido como una estrategia pedagógica eficaz para aumentar la motivación de los estudiantes y promover el aprendizaje colaborativo (Haros, 2023; Ortiz et al., 2021). Este tipo de enfoques, que convierten el aprendizaje en un juego o reto, no solo refuerzan los conocimientos matemáticos, sino que también promueven habilidades sociales y emocionales. Por su parte, la implementación de entornos virtuales de aprendizaje también ha demostrado ser efectiva, proporcionando un espacio donde los estudiantes pueden interactuar y aprender de manera más dinámica y autónoma (González et al., 2021; Guizado et al., 2022).

El enfoque pedagógico actual en la enseñanza de la matemática también se encuentra influenciado por las dos grandes corrientes filosóficas y pedagógicas: la empirista y la constructivista. La corriente empirista, también conocida como transmisiva, sostiene que el estudiante aprende de manera pasiva, recibiendo el conocimiento directamente del docente, quien organiza y presenta el contenido de forma estructurada. Este enfoque, aunque útil en ciertos contextos, tiende a limitar la creatividad y la participación activa del estudiante, reduciendo su rol a un receptor de información. En contraste, la corriente constructivista sostiene que el conocimiento no se transmite de forma unidireccional, sino que se construye activamente a través de la interacción con el entorno y con otros. El estudiante es visto como el centro del proceso de aprendizaje, donde el docente actúa como guía o facilitador que crea situaciones de aprendizaje relevantes y significativas.

La reflexión sobre las prácticas pedagógicas actuales y la disposición para innovar son fundamentales para mejorar la enseñanza de las matemáticas en el contexto actual (Blomhøj, 2021; Astudillo-Villalba et al., 2021). Las teorías constructivistas, en particular, ofrecen una comprensión más compleja y matizada del proceso de aprendizaje, proponiendo que el conocimiento no es un conjunto de hechos y datos a ser memorizados, sino un proceso dinámico en el que los estudiantes activamente construyen y reconfiguran su comprensión a medida que se enfrentan a nuevos desafíos.

En este sentido, varios teóricos de la educación han desarrollado teorías que, aunque varían en algunos aspectos, comparten la idea de que el aprendizaje es un proceso activo y social. Piaget, por ejemplo, con su teoría cognitiva del desarrollo, sugirió que el conocimiento se construye de manera activa a través de la interacción del individuo con su entorno. Él destacó dos procesos fundamentales en el desarrollo cognitivo: la organización y la adaptación. Los estudiantes organizan su conocimiento en esquemas mentales que se van adaptando a medida que enfrentan nuevas experiencias y resuelven problemas. El conflicto cognitivo, que ocurre cuando el estudiante se enfrenta a una situación que no puede resolver con sus esquemas previos, es un motor clave en el desarrollo del conocimiento. Este proceso de adaptación lleva a los estudiantes a reorganizar y expandir sus esquemas, lo que les permite avanzar hacia niveles de comprensión más complejos.

Vygotsky, por su parte, formuló el constructivismo sociocultural, una teoría que subrayó la importancia de la interacción social y la mediación cultural en el proceso de aprendizaje. Sostuvo que el desarrollo del conocimiento no se puede entender fuera del contexto social y cultural en el que se produce. En su teoría, la internalización juega un papel fundamental, ya que el conocimiento se aprehende a través de la interacción con otros y con el entorno cultural. Vygotsky también introdujo el concepto de la "zona de desarrollo próximo", que se refiere al espacio entre lo que el estudiante puede hacer de manera autónoma y lo que puede lograr con la ayuda de un docente o compañero. Este concepto resaltó la importancia de que el docente situé el aprendizaje en esta zona, proporcionando apoyo y orientación que permita al estudiante superar sus limitaciones actuales y alcanzar su potencial de desarrollo.

Bruner, a través de su teoría del aprendizaje por descubrimiento, hizo hincapié en la importancia de ofrecer a los estudiantes oportunidades para involucrarse activamente en el proceso de aprendizaje. Según Bruner, el conocimiento se adquiere de manera más profunda cuando los estudiantes tienen la oportunidad de descubrirlo por sí mismos, resolviendo problemas y formulando hipótesis. Este enfoque promueve el desarrollo de habilidades metacognitivas y de pensamiento crítico, esenciales para un aprendizaje significativo y duradero. Bruner también destacó la importancia de la secuenciación de los contenidos de manera que los estudiantes puedan construir el conocimiento de manera progresiva, comenzando con problemas más simples y avanzando hacia desafíos más complejos.

Finalmente, Ausubel desarrolló la teoría del aprendizaje significativo, señaló que para que el aprendizaje sea efectivo, debe ser relevante y significativo para el estudiante. El nuevo conocimiento debe integrarse de manera coherente con los conocimientos previos del estudiante. De esta manera, el aprendizaje se vuelve más profundo y duradero, ya que los estudiantes pueden conectar la nueva información con lo que ya saben. Para facilitar este tipo de aprendizaje, el docente debe identificar los conocimientos previos de los estudiantes y presentar los nuevos contenidos de manera que maximicen su potencial para ser significativos. La teoría de Ausubel también critica el aprendizaje memorístico y mecánico, señalando que el aprendizaje debe ser un proceso de construcción activa de conocimiento, en el que el estudiante tenga la oportunidad de reflexionar y relacionar los nuevos conocimientos con su estructura cognitiva existente.

En conclusión, las teorías constructivistas ofrecen un marco valioso para comprender cómo los estudiantes construyen su conocimiento y cómo los docentes pueden facilitar este proceso mediante estrategias pedagógicas adecuadas. La integración de las TIC en el aula, junto con un enfoque constructivista, pueden proporcionar experiencias de aprendizaje más dinámicas, interactivas y efectivas, ayudando a los estudiantes a desarrollar no solo habilidades matemáticas, sino también competencias cognitivas, emocionales y sociales que les permitirán enfrentar los retos del siglo XXI.

1.2.2. Tendencias Actuales de la Enseñanzas y el Aprendizaje de la Matemáticas de Nivel Universitario

En los últimos años, la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en el ámbito universitario han experimentado transformaciones profundas, impulsadas por los avances tecnológicos, especialmente en la enseñanza de conceptos complejos como las aplicaciones de la integral definida. Estas innovaciones buscan mejorar la calidad educativa, fomentar la participación activa de los estudiantes y emplear nuevas metodologías pedagógicas que favorezcan un aprendizaje más dinámico y efectivo. Un enfoque destacado en este contexto es el centrado en el desarrollo del pensamiento lógico-matemático, el cual promueve la resolución estructurada y coherente de problemas. Sin embargo, este modelo ha sido cuestionado por su falta de integración de valores éticos y morales que contribuyan a la justicia social y a la participación equitativa de todos los estudiantes (Miranda & Gard, 2020).

Por otro lado, el enfoque de aprendizaje invertido (*flipped learning*) ha ganado relevancia. Este modelo permite que los estudiantes adquieran los contenidos teóricos fuera del aula mediante recursos digitales, lo que libera el tiempo de clase para actividades prácticas y resolución de problemas. Esta estrategia fomenta un aprendizaje activo y refuerza la autonomía de los estudiantes (Sánchez et al., 2022). De manera complementaria, el enfoque basado en recorridos de estudio e investigación (REI) promueve proyectos interdisciplinarios que integran las matemáticas con otras áreas del conocimiento, ofreciendo a los estudiantes la oportunidad de aplicar los conceptos matemáticos en situaciones reales (Gazzola et al., 2021).

Otro enfoque relevante en la educación matemática universitaria es el basado en competencias. Este modelo se centra en el desarrollo de habilidades prácticas y aplicables dentro del campo matemático, permitiendo a los estudiantes no solo comprender conceptos teóricos, sino también desarrollar competencias esenciales como el razonamiento lógico, la resolución de problemas, el pensamiento crítico, la comunicación matemática y la capacidad para trabajar en equipo. Estas competencias son fundamentales para enfrentar los retos del mundo contemporáneo, promoviendo una educación orientada a resultados y aplicaciones prácticas que preparen a los estudiantes para los desafíos del siglo XXI (Fonseca & Felipe, 2020).

Asimismo, el uso de plataformas digitales ha jugado un papel crucial en el desarrollo de competencias digitales dentro de la educación superior, integrándose eficazmente con el enfoque basado en competencias. Estas plataformas facilitan el acceso a una variedad de recursos educativos como libros digitales, videos explicativos, ejercicios interactivos, y otras herramientas en línea que enriquecen el proceso de aprendizaje (Fitzgerald, 2022). Las herramientas interactivas y multimedia que ofrecen estas plataformas permiten la visualización de gráficos, la realización de simulaciones y experimentos virtuales, lo que facilita la comprensión de conceptos matemáticos complejos (Andraca-Sánchez et al., 2022). Este enfoque favorece un aprendizaje autónomo y práctico, brindando a los estudiantes la oportunidad de explorar y manipular conceptos matemáticos en diversos escenarios, lo que optimiza su comprensión y aplicación.

A pesar de que estas tendencias metodológicas buscan mejorar la calidad educativa y fomentar una mayor participación estudiantil en el aprendizaje de las matemáticas, es fundamental destacar que las metodologías deben ser adaptadas constantemente a la evolución tecnológica y al perfil cambiante de los estudiantes. Esta adaptación es crucial para asegurar una mejora continua en la enseñanza. Por tanto, es esencial que los educadores se mantengan actualizados sobre los avances tecnológicos y busquen nuevas formas de integrar la tecnología en sus prácticas pedagógicas, adaptando las metodologías a las habilidades digitales y los estilos de aprendizaje particulares de los estudiantes. De esta manera, se fomenta la participación activa y el compromiso de los estudiantes con su propio proceso de aprendizaje.

El conocimiento de estas tendencias permite a los educadores diseñar actividades y tareas que promuevan la participación y el compromiso estudiantil, contribuyendo a un aprendizaje más significativo y duradero. De este modo, los estudiantes estarán mejor preparados para enfrentar los desafíos laborales del siglo XXI, dotados no solo de conocimientos matemáticos, sino también de las competencias necesarias para afrontar con éxito los retos del mundo profesional y académico.

1.2.3. Enseñanza y Aprendizaje de las Aplicaciones de la Integral Definida

Durante la última década, la enseñanza de las aplicaciones de la integral definida en las universidades ha experimentado un notable impulso gracias a la integración de diversas tecnologías educativas. Estas innovaciones tecnológicas no solo han facilitado el aprendizaje de conceptos complejos, sino que también han promovido el desarrollo del pensamiento crítico, creativo y espacial de los estudiantes, elementos esenciales para comprender y transformar el entorn o. La integral definida, como herramienta matemática fundamental, permite calcular áreas, volúmenes y longitudes de arco en contextos reales, lo que la convierte en un recurso indispensable para abordar problemas prácticos en diversas disciplinas. Para comprender plenamente sus aplicaciones, es necesario contar con una base sólida de conocimientos matemáticos y la capacidad de vincular estos conceptos abstractos con situaciones cotidianas.

Una de las formas más efectivas de enseñar las aplicaciones de la integral definida es mediante el enfoque de resolución de problemas, el cual guía a los estudiantes a interpretar situaciones contextualizadas, identificar variables relevantes, establecer relaciones con el modelado matemático y, finalmente, aplicar la integral definida para resolver estos problemas. Este enfoque tiene como objetivo principal vincular a los estudiantes con el mundo real, fomentando la capacidad de abstracción y la comprensión de las relaciones geométricas involucradas, lo cual resulta esencial para el desarrollo de los contenidos matemáticos. Además, permite a los estudiantes ver la utilidad de las matemáticas en situaciones prácticas, lo que motiva su aprendizaje y les ayuda a integrar los conceptos en su conocimiento práctico.

Para facilitar este proceso, es crucial fomentar la exploración y visualización a través del uso de herramientas digitales, las cuales potencian la capacidad de abstracción de los estudiantes. Herramientas como Cabri Geometry, GeoGebra, Wolfram Alpha y Winplot permiten una interacción dinámica y visual con los conceptos matemáticos. Por ejemplo, Cabri Geometry y GeoGebra ofrecen entornos interactivos que posibilitan a los estudiantes programar y visualizar objetos geométricos en dos y tres dimensiones. Estos objetos matemáticos pueden ser luego importados a programas de modelado tridimensional como SketchUp, lo que les permite obtener representaciones más realistas y ver los objetos desde diferentes perspectivas, interactuando con ellos de manera práctica.

Cardozo (2022) destacó que la integración de computadoras, internet y pizarras digitales ha ampliado significativamente las oportunidades para los docentes que buscan incorporar nuevas tecnologías en sus actividades educativas. Este avance representa un contraste con los métodos tradicionales de enseñanza, que se centraban en enfoques expositivos y limitaban la interacción activa de los estudiantes, restringiendo su capacidad de adquirir experiencias de aprendizaje de manera dinámica. La incorporación de tecnologías digitales, por tanto, ha transformado el panorama educativo, permitiendo una participación más activa y comprometida de los estudiantes en su proceso de aprendizaje, y promoviendo un entorno más interactivo, colaborativo y adaptado a las necesidades de la era digital.

En este contexto, la necesidad de modernizar la enseñanza de las matemáticas y adaptar las clases a las demandas de la sociedad contemporánea se ha vuelto urgente. La inclusión de nuevas tecnologías en la enseñanza matemática ha dado lugar a innovaciones como la geometría dinámica, una estructura geométrica que emerge del uso de las tecnologías de la información y la comunicación (TIC). Según Gómez (2001), la geometría dinámica facilita el movimiento de figuras geométricas y permite realizar aplicaciones en dos y tres dimensiones, lo cual enriquece la comprensión visual y teórica de los conceptos geométricos.

Por otro lado, las teorías del aprendizaje también han experimentado una evolución significativa en respuesta a los avances tecnológicos y científicos. Rojas et al. (2023) destacaron que diversas teorías ayudan a comprender cómo los seres humanos adquieren y procesan conocimiento, centrándose en destrezas, habilidades, adquisición de conceptos y razonamiento. Este razonamiento es esencial en una sociedad inmersa en la era digital, donde las TIC evolucionan rápidamente y afectan la toma de decisiones educativas. Las teorías contemporáneas del aprendizaje se han adaptado a estos avances, y ahora incorporan el uso de las tecnologías para mejorar la calidad educativa y facilitar el acceso a los conocimientos de manera más efectiva.

En conclusión, existen diversos enfoques metodológicos para la enseñanza y el aprendizaje de las aplicaciones de la integral definida que aprovechan el potencial de las herramientas digitales. Aunque la implementación de estas actividades pueda presentar desafíos debido a la complejidad de algunas de las herramientas y conceptos, todos coinciden en que el uso de tecnologías refuerza y enriquece el proceso de aprendizaje. La combinación de métodos innovadores con tecnologías de vanguardia no solo mejora la comprensión de los contenidos matemáticos, sino que también prepara a los estudiantes para enfrentar los retos del mundo moderno de manera efectiva y creativa.

1.2.4. La Realidad Aumentada y el Aprendizaje de las Aplicaciones de la Integral Definida

La tecnología Realidad Aumentada (RA) se ha consolidado como una herramienta educativa innovadora que potencia el aprendizaje en diversas áreas del conocimiento, especialmente en matemáticas. Esta tecnología permite integrar elementos virtuales en el mundo real, creando experiencias interactivas y visualmente atractivas que facilitan la comprensión de conceptos abstractos. Su impacto en el proceso de aprendizaje es particularmente evidente en el estudio de las aplicaciones de la integral definida. En la educación superior, la RA se ha utilizado como un recurso pedagógico que optimiza la enseñanza, favoreciendo la abstracción, la visualización, la creatividad y la exploración por parte de los estudiantes.

El estudio de las aplicaciones de la integral definida es fundamental, ya que permite calcular áreas de regiones planas, determinar volúmenes de sólidos mediante secciones planas y sólidos de revolución, y resolver problemas contextualizados. No obstante, muchos estudiantes enfrentan dificultades al intentar comprender y aplicar estos conceptos debido a su carácter abstracto y teórico.

Aunque a primera vista, la RA y las aplicaciones de la integral definida puedan parecer conceptos sin conexión, en realidad existen situaciones en las que la RA puede desempeñar un papel crucial en el proceso de aprendizaje. Esta tecnología facilita la comprensión de conceptos abstractos al proporcionar representaciones visuales interactivas que mejoran la experiencia educativa. Por ejemplo, mediante dispositivos compatibles con sistemas operativos Android y iOS, como teléfonos inteligentes o lentes especiales, los estudiantes pueden visualizar en 3D la generación de sólidos mediante la superposición de elementos digitales, como gráficos y animaciones.

Para lograr una representación precisa de estos objetos, se emplea software como GeoGebra 3D, mientras que la plataforma ARCore permite visualizar los objetos tridimensionales en un entorno real. Los usuarios pueden interactuar con las superficies, ampliar o reducir los objetos, y visualizarlos desde diferentes perspectivas. Esta interacción permite a los estudiantes observar cómo se generan los objetos en tres dimensiones, lo que brinda una representación dinámica de los conceptos matemáticos asociados con las aplicaciones de la integral definida, facilitando así una comprensión más profunda.

En relación con la incorporación de la RA en la educación, Joo (2016) señaló que, dentro del contexto de integración de nuevas herramientas en los ambientes educativos, la RA destaca como una de las tecnologías más importantes (Adams, 2005; L. Johnson et al., 2011; Martínez Landa, 2015). La RA crea un entorno inmersivo e interactivo, lo que tiene implicaciones significativas en los contextos educativos digitales. Entre sus beneficios, se incluyen:

- La capacidad de los usuarios de cambiar el contexto de referencia y generar diversas perspectivas de visualización, pasando de vistas exocéntricas (desde el exterior del objeto) a egocéntricas (desde el interior del objeto).

- La posibilidad de que los estudiantes apliquen el conocimiento adquirido en nuevos contextos o situaciones, favoreciendo la transferencia de contenidos o el aprendizaje futuro.

Desde el punto de vista teórico, la RA puede entenderse como parte de un paradigma tecnológico en el que la información del mundo real se relaciona con datos generados por ordenador en un entorno tridimensional (Amin & Govilkar, 2015; C.-H.

Chen et al., 2016; Kipper & Rampolla, 2012; Martin-Gutiérrez et al., 2013). Este paradigma se estructuró según el Continuo Virtual propuesto por Milgram y Kishino (1994; 1995), donde la RA ocupa una fase intermedia entre la realidad absoluta y la realidad completamente digitalizada.

Como tecnología, la RA ha dado lugar a una serie de elementos distintivos que permiten su clasificación y caracterización, generando diversas tipologías y taxonomías en torno a estas herramientas (Aurelia et al., 2014; Kipper & Rampolla, 2012; Minguell et al., 2012). Estas clasificaciones incluyen los diferentes tipos de reconocimientos que realiza la RA de su entorno, tales como códigos QR, imágenes, objetos o localización, así como las modalidades de interacción con los elementos visuales y el contexto de hardware en el que se despliega, como en el caso de la RA móvil.

En los últimos 15 años, los sistemas educativos universitarios han promovido alternativas educativas utilizando internet como medio de comunicación, con el objetivo de reducir las clases presenciales y adaptar la enseñanza a nuevas formas de aprendizaje (Cabero, Vásquez & López, 2018). En este contexto, el reto de las universidades ha sido rediseñar sus programas formativos en función de las competencias profesionales, en lugar de centrarse únicamente en las asignaturas tradicionales. Así, se busca fomentar el desarrollo de propuestas didácticas que involucren el trabajo colaborativo (Bressler y Bodzin, 2013; Vázquez Cano et al., 2015; Álvarez-Marín et al., 2017).

El análisis de experiencias didácticas que utilizan RA en la educación superior ha revelado que el empleo de objetos aumentados genera un interés significativo entre los estudiantes. Además, la RA fomenta escenarios educativos colaborativos e interactivos que contribuyen a una enseñanza más abierta y creativa. Según Montecé et al. (2017), la aplicación de RA en el proceso de enseñanza-aprendizaje presenta ventajas sobre los métodos tradicionales, destacándose en aspectos como el realismo, la interactividad y la motivación para aprender. La integración de esta tecnología permite mejorar la experiencia educativa, proporcionando una solución tecnológica móvil, de bajo costo, que facilita la innovación en los procesos de enseñanza. Los estudiantes pueden acceder a contenidos virtuales en tres dimensiones, lo que genera un entorno de trabajo distinto que los motiva a aprender, por ejemplo, mediante folletos con códigos QR, cubos interactivos o libros.

Por otro lado, Cubillo (2014) investigó cómo el sistema ARLE, basado en la RA, puede ser una herramienta de apoyo en la enseñanza de aplicaciones de la integral definida a estudiantes de ingeniería electrónica. ARLE es una herramienta intuitiva y sencilla que permite a los usuarios, incluso sin conocimientos de programación, crear y expandir recursos educativos. Esta plataforma integra tecnologías como dispositivos móviles, RA y plataformas web, lo que facilita su uso para enriquecer materiales educativos tradicionales, como libros y apuntes, con contenido interactivo.

El auge de estas tecnologías es respaldado por informes de consultoras como Gartner e IDC, que anticipan un crecimiento significativo en el número de aplicaciones móviles relacionadas con la educación, el entretenimiento y la vida social (Centro Innovación BBVA, 2014).

Además, el pensamiento espacial se ha identificado como fundamental para el desarrollo del pensamiento científico, ya que es esencial para representar y manipular información en la resolución de problemas. Gardner (1983) subrayó que profesiones como la ingeniería, la arquitectura, la medicina y disciplinas científicas como la química y las matemáticas requieren un alto nivel de inteligencia espacial. En este sentido, Herrera y Guzmán (2015) destacaron que las habilidades espaciales pueden desarrollarse significativamente a través de la interacción con objetos tanto físicos como virtuales. En asignaturas como Cálculo Multivariable, estas habilidades son clave para el rendimiento académico, especialmente en la comprensión de conceptos y objetos matemáticos complejos que pueden enriquecerse mediante el uso de la RA.

En su investigación identificaron conceptos matemáticos que requieren de habilidades de visualización espacial, y demostraron cómo la RA puede mejorar su comprensión. Crearon un prototipo de aplicación para Android que permite visualizar objetos matemáticos tridimensionales a partir de un marcador QR, generando un entorno de aprendizaje interactivo. Esta herramienta también facilitó la resolución de ejercicios al mostrar la representación tridimensional de conceptos como la localización de la región de integración, intersecciones entre superficies y variaciones de orientación en un sistema de coordenadas.

Por lo tanto, el estudio de la inteligencia espacial es crucial en la educación, especialmente en áreas relacionadas con la geometría espacial. La RA ofrece una alternativa poderosa para mejorar el aprendizaje de conceptos complejos como las aplicaciones de integrales múltiples. Diversos estudios, como los de Kaufmann y Schmalstieg, o Salinas, han demostrado el potencial de la RA para enseñar geometría mediante la construcción de figuras tridimensionales y la representación interactiva de superficies y sólidos. Esta capacidad de manipular objetos matemáticos en el entorno real, potenciada por la computación, mejora la comprensión de conceptos como superficies tridimensionales y proyecciones, aspectos clave en el estudio de integrales múltiples.

El uso de la RA facilita la visualización de figuras complejas y la comprensión de su relación espacial, lo cual es particularmente valioso en el cálculo de volúmenes de sólidos a través de métodos como el de arandelas. Los estudiantes pueden manipular funciones y dominios de integración en tiempo real, observando cómo varían el área y el volumen en diferentes escenarios. Este tipo de interacción, acompañado de retroalimentación visual y auditiva, favorece una comprensión más profunda y un aprendizaje autónomo.

La RA promueve también el pensamiento crítico, ya que desafía a los estudiantes a explorar y resolver problemas de manera activa. Este enfoque de aprendizaje, centrado en la exploración y el descubrimiento, mejora la retención de información y facilita la transferencia de conocimientos a situaciones prácticas.

En conclusión, la RA se presenta como una herramienta didáctica innovadora y eficaz para mejorar el aprendizaje de conceptos matemáticos complejos, especialmente en áreas que requieren de visualización y manipulación de objetos en tres dimensiones. Su integración en el proceso educativo contribuye a una educación más dinámica, colaborativa e interactiva, promoviendo la motivación de los estudiantes y el desarrollo de competencias profesionales clave en su formación.

1.2.5. Capacidades que Miden el Nivel de Aprendizaje de las Aplicaciones de la Integral Definida

La American Association of Colleges and Universities (2009) definió las capacidades de la siguiente manera: Interpretación, que implica la explicación de la información presentada en diversas formas matemáticas (por ejemplo, ecuaciones, gráficos, diagramas, tablas, palabras); Representación, que se refiere a la conversión de información relevante en diferentes formas matemáticas (por ejemplo, ecuaciones, gráficos, diagramas, tablas, palabras); Cálculo, que involucra el uso de algoritmos y procedimientos estándar en matemáticas y/o estadística dentro de situaciones de contexto real; Aplicación/Análisis, en la que se emiten juicios y se extraen conclusiones apropiadas, siempre considerando los límites del análisis; Suposiciones, que trata de realizar y evaluar suposiciones importantes en estimación, modelado y análisis de datos; y Comunicación, que implica expresar evidencia cuantitativa que respalde el argumento o propósito del trabajo (p. 4).

Asimismo, el Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación (ICFES ,2015) definió las capacidades como: Interpretación y representación, Formulación y ejecución, y Argumentación. En el caso de la Interpretación y representación, el estudiante comprende y transforma representaciones de datos cuantitativos o de objetos matemáticos en distintos formatos (textos, tablas, gráficas, diagramas, esquemas), además de transformar la representación de una o más piezas de información. En cuanto a formulación y ejecución, frente a un problema que involucra información cuantitativa, el estudiante plantea e implementa estrategias que conducen a soluciones adecuadas, diseña planes para la solución de problemas que implican información cuantitativa, y ejecuta el plan para resolver el problema. En Argumentación, el estudiante valida los procedimientos y estrategias matemáticas utilizados para dar solución a problemas, plantea afirmaciones que sustentan o refutan una interpretación dada la información, y argumenta a favor o en contra de un procedimiento para resolverlo, basándose en criterios presentados y estableciendo la validez de la solución (pp. 24-26).

Por otro lado, la Calidad Educativa UPC (2022) definió las capacidades de la siguiente manera: Interpretación hace referencia a la habilidad de comprender y dar sentido a los datos numéricos en un contexto específico; Representación implica la capacidad de expresar y mostrar la información en diversos formatos, como tablas, gráficos o ecuaciones matemáticas; Cálculo se refiere a la realización de operaciones matemáticas (como suma, resta, multiplicación, división, entre otras) para manipular y procesar datos numéricos; Análisis involucra la evaluación de la información, la identificación de patrones y tendencias, y la elaboración de conclusiones basadas en los datos y resultados obtenidos; y Argumentación es la capacidad de justificar y defender las soluciones propuestas, utilizando evidencia cuantitativa y razonamiento lógico para respaldar las afirmaciones. Este último aspecto es fundamental para la comunicación efectiva de los resultados y para persuadir a los demás de la validez de las soluciones propuestas.

Por lo tanto, la Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas ha adaptado las capacidades descritas, tomando en cuenta el nivel de estudio, los logros planteados y el entorno educativo en el que se desarrollan.

El enfoque propuesto por diversas instituciones para definir y desarrollar las capacidades matemáticas no solo busca la adquisición de habilidades técnicas, sino también fomentar el pensamiento crítico, la resolución de problemas y la capacidad de tomar decisiones fundamentadas. En este sentido, el estudiante no solo debe aprender a realizar cálculos, sino también a interpretar datos, representarlos de manera adecuada, argumentar de forma coherente y analizar las implicaciones de sus soluciones en contextos reales. Esta integración de competencias es esencial para el desarrollo de individuos que no solo sean competentes en el manejo de herramientas matemáticas, sino que también sean capaces de enfrentar desafíos complejos con una visión amplia y crítica, contribuyendo así a una sociedad más preparada y capaz de tomar decisiones informadas. La adaptabilidad de estas capacidades a diferentes niveles educativos refuerza la importancia de contextualizar el aprendizaje y de hacer frente a las necesidades cambiantes de los estudiantes, garantizando que adquieran las competencias necesarias para desempeñarse eficazmente en un entorno profesional y académico cada vez más globalizado y tecnológico.

Tabla 1

Capacidades de acuerdo con el Nivel de Estudio

Niveles / Dimensiones	**Pre-Novato** Ingresantes	**Novato** Primeros ciclos	**Intermedio** Mitad de la carrera	**Avanzado** Egresado	**Ejemplar** Postgrado
Interpretación Da significado a información numérica en diversos formatos en situaciones de contexto real.	Identifica datos e información numérica en algunos formatos, para definir una situación problemática en un contexto real.	Describe datos e información numérica pertinente en diversos formatos, para definir una situación problemática en un contexto real.	Relaciona datos e información numérica pertinente en diversos formatos, para definir una situación problemática en un contexto real.	Genera información numérica relevante en diversos formatos, para definir una situación problemática en un contexto real.	Genera información numérica relevante en diversos formatos, para definir una situación problemática en un contexto real especializado.
Representación Describe mediante expresiones matemáticas y/o estadísticas, situaciones de contexto real.	Identifica una expresión matemática y/o estadística pero no se relaciona a la situación Problemática	Identifica una expresión matemática y/o estadística relacionada a la situación problemática en un contexto real.	Describe una expresión matemática y/o estadística relacionada a la situación problemática en un contexto real.	Selecciona una expresión matemática y/o estadística pertinente para resolver la situación problemática en un contexto real.	Selecciona la expresión matemática y/o estadística más eficiente para resolver la situación problemática en un contexto real especializado.
Cálculo Utiliza algoritmos y procedimientos estándar de la matemática y/o estadística en situaciones de contexto real.	Efectúa la operación matemática y/o estadística identificada, de manera incorrecta.	Efectúa parcialmente la operación matemática y/o estadística seleccionada, para resolver la situación problemática en un contexto real.	Efectúa la operación matemática y/o estadística seleccionada de manera completa, para resolver la situación problemática en un contexto real.	Efectúa la operación matemática y/o estadística seleccionada de manera completa, para resolver la situación problemática en un contexto real.	Efectúa la operación matemática y/o estadística seleccionada de manera completa, para resolver la situación problemática en un contexto real especializado.
Análisis y argumentación Sustenta los resultados y su aplicación práctica, planteando una solución en situaciones de contexto real.	Presenta el resultado del cálculo sin interpretarlo ni relacionarlo con la situación problemática.	Sustenta el resultado del cálculo relacionándolo con la situación problemática.	Sustenta el resultado del cálculo y lo relaciona con la situación problemática, presentando alternativas de solución básicas y/o evidentes.	Sustenta el resultado del cálculo y lo relaciona con la situación problemática, comunicando una solución concreta y analizando su impacto.	Sustenta el resultado del cálculo y lo relaciona con la situación problemática, analizando distintos escenarios y comunicando las soluciones.

Nota. Extraído de competencias generales UPC (Calidad Educativa UPC, 2022)

1.3. Definición de Términos Básicos

Aplicaciones Nativas

Son programas diseñados específicamente para un sistema operativo particular, lo que les permite aprovechar al máximo las capacidades del hardware y software del dispositivo en el que se ejecutan. Estas aplicaciones se desarrollan utilizando herramientas y lenguajes de programación específicos para cada sistema operativo, lo que garantiza un rendimiento optimizado y una experiencia de usuario fluida. A diferencia de las aplicaciones web o híbridas, las aplicaciones nativas tienen la ventaja de poder acceder a funcionalidades avanzadas del dispositivo, como la cámara, los sensores, el GPS, entre otros, lo que las hace ideales para tareas que requieren un alto rendimiento o integración con el hardware del dispositivo (Reyes, 2021).

Aplicaciones Web

Son herramientas informáticas que permiten a los usuarios interactuar con un servidor a través de un navegador, facilitando el acceso a información y servicios en línea sin necesidad de instalar software adicional en el dispositivo. Estas aplicaciones se ejecutan directamente en el navegador, lo que las hace multiplataforma, es decir, pueden ser utilizadas en cualquier dispositivo que tenga acceso a internet y un navegador compatible. Su principal ventaja radica en la facilidad de actualización y mantenimiento, ya que los cambios se realizan en el servidor y se reflejan de inmediato para todos los usuarios, sin necesidad de actualizaciones manuales (Pedraza et al., 2023).

Aprendizaje

Es un proceso fundamental en el desarrollo humano que implica la adquisición y modificación de conocimientos, habilidades, actitudes y valores a través de la experiencia, el estudio y la enseñanza. El aprendizaje puede ser formal o informal, y abarca diversas áreas del conocimiento. Además, el proceso de aprendizaje se ve influido por factores cognitivos, emocionales y sociales, lo que significa que no solo se trata de adquirir información, sino también de cómo esta información es interpretada, procesada y aplicada en diferentes contextos. El aprendizaje efectivo es clave para la evolución individual y colectiva, ya que promueve el desarrollo de competencias y capacidades necesarias para enfrentar los retos del entorno (Zamata et al., 2020).

Expresión Matemática y/o Estadística

Se refiere al conjunto de símbolos y notaciones que tienen como objetivo describir situaciones o problemas reales mediante operaciones matemáticas y estadísticas. Esto incluye expresiones como la suma, la resta, la multiplicación, la división, las ecuaciones simples y las fórmulas estadísticas. A través de estas expresiones, es posible modelar fenómenos, realizar cálculos y tomar decisiones basadas en datos cuantificables. Las matemáticas y la estadística juegan un papel crucial en áreas como la ingeniería, la economía, las ciencias sociales y la tecnología, entre otras (Calidad Educativa UPC, 2022, p. 3).

ARCore

Es una plataforma de desarrollo de la realidad aumentada de Google, diseñada para permitir a los desarrolladores crear aplicaciones de realidad aumentada de alta calidad para dispositivos móviles, como smartphones y tabletas. Este kit de desarrollo de software (SDK) incluye una serie de herramientas y APIs que permiten integrar objetos y elementos digitales en el mundo real, utilizando la cámara, el GPS y los sensores del dispositivo. Una de las características más destacadas de ARCore es su capacidad para estimar la profundidad y la posición en el espacio, lo que permite a las aplicaciones crear experiencias interactivas en 3D que se integran de manera natural con el entorno físico del usuario. ARCore se utiliza en una amplia variedad de aplicaciones, desde videojuegos hasta soluciones empresariales y educativas (Opu et al., 2021).

GeoGebra

Es un software educativo dinámico que combina geometría, álgebra, cálculo y estadística en una única plataforma interactiva. Está diseñado para facilitar el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas en todos los niveles educativos, desde la educación primaria hasta la universidad. GeoGebra permite a los usuarios crear representaciones visuales de conceptos matemáticos, lo que favorece la comprensión de principios abstractos a través de la interacción y experimentación. Además, ofrece una amplia gama de herramientas para explorar temas como la geometría analítica, las ecuaciones diferenciales y las probabilidades. Esta plataforma se ha convertido en una herramienta esencial para educadores y estudiantes, promoviendo un enfoque visual y dinámico del aprendizaje de las matemáticas (Widana et al., 2023).

Inteligencia espacial

Es una de las ocho inteligencias que Howard Gardner propuso en su teoría de las inteligencias múltiples, presentada en su obra *Frames of Mind* (1983). Esta teoría planteó que la inteligencia no es un concepto único, sino que se manifiesta en diferentes formas y capacidades, cada una de las cuales es importante para el desarrollo de los individuos. La inteligencia espacial está relacionada con la capacidad para visualizar y manipular objetos y formas en el espacio, lo que permite a las personas realizar tareas como leer mapas, resolver problemas de diseño y entender representaciones tridimensionales. Es una habilidad fundamental en campos como la arquitectura, el arte, la ingeniería y la ciencia, y también juega un papel crucial en el aprendizaje de la geometría y otras disciplinas visuales (Ernst et al., 2001).

Método de Arandela

Es un procedimiento utilizado en cálculo integral para determinar el volumen de un sólido generado al girar una región limitada entre dos curvas alrededor de un eje. Este método es especialmente útil cuando la región que se gira tiene un agujero, formando una "arandela" en el sólido resultante. La clave del método consiste en calcular el volumen de cada uno de los discos que forman el sólido y restar el volumen del agujero central, lo que da lugar a un volumen total. Este enfoque permite calcular de manera precisa el volumen de formas complejas que no pueden resolverse mediante métodos sencillos de integración directa (Stewart, 2015).

Realidad Aumentada

Es una tecnología que superpone elementos virtuales a la percepción del mundo real en tiempo real, creando una experiencia interactiva e inmersiva. A través de dispositivos como smartphones, gafas o cascos que empleen la tecnología de realidad aumentada, los usuarios pueden ver objetos tridimensionales generados por computadora que se integran perfectamente con su entorno físico. La tecnología realidad aumentada tiene aplicaciones en numerosos campos, desde los videojuegos y la educación hasta la medicina, el comercio y la industria, mejorando la interacción del usuario con su entorno y proporcionando información adicional de manera inmediata (León-Velarde et al., 2024).

Sólido de Revolución

Es una figura geométrica tridimensional que se genera al rotar una figura bidimensional alrededor de un eje. Esta rotación genera un objeto de forma continua y simétrica. Los sólidos de revolución son fundamentales en el estudio de la geometría y el cálculo, ya que se utilizan para calcular volúmenes mediante técnicas de integración. Algunos ejemplos comunes de sólidos de revolución incluyen el cilindro, el cono y la esfera. El cálculo del volumen de estos sólidos es crucial en diversas áreas, como la ingeniería, la arquitectura y la física, ya que permite modelar y analizar formas complejas que surgen en la práctica (Blanco et al., 2019).

CAPÍTULO II: HIPÓTESIS Y VARIABLES

2.1. Formulación de Hipótesis Principal y Derivadas

Hipótesis Principal

$H_{i:}$ La aplicación de la propuesta didáctica basada en el uso de la RA como herramienta de apoyo, influye significativamente en el nivel de aprendizaje de las aplicaciones de la integral definida, en estudiantes de la carrera de Arquitectura de la Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas.

Hipótesis Derivadas

H_1: La aplicación de la propuesta didáctica basada en el uso de la RA influye significativamente en el desarrollo de la capacidad de interpretar la información basada en diferentes formatos para el aprendizaje de las aplicaciones de la integral definida, en estudiantes de la carrera de Arquitectura de la Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas.

H_2: La aplicación de la propuesta didáctica basada en el uso de la RA influye significativamente en el desarrollo de la capacidad de representar matemáticamente situaciones a partir de la información brindada para el aprendizaje de las aplicaciones de la integral definida, en estudiantes de la carrera de Arquitectura de la Universidad de Ciencias Aplicadas.

H_3: La aplicación de la propuesta didáctica basada en el uso de la RA influye significativamente en el desarrollo de la capacidad de efectuar operaciones matemáticas mediante algoritmos para el aprendizaje de las aplicaciones de la integral definida, en estudiantes de la carrera de Arquitectura de la Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas.

H_4: La aplicación de la propuesta didáctica basada en el uso de la RA influye significativamente en el desarrollo de la capacidad de analizar los resultados obtenidos de la aplicación de métodos matemáticos para el aprendizaje de las aplicaciones de la integral definida, en estudiantes de la carrera de Arquitectura de la Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas.

H_5: La aplicación de la propuesta didáctica basada en el uso de la RA influye significativamente en el desarrollo de la capacidad de explicar las conclusiones de su razonamiento para el aprendizaje de las aplicaciones de la integral definida, en estudiantes de la carrera de Arquitectura de la Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas.

2.2. Variables y Definición Operacional

Variable Independiente:

Uso de la RA como herramienta interactiva en la enseñanza de las aplicaciones de la integral definida.

Variable Dependiente:

Nivel de aprendizaje de las aplicaciones de la integral definida en estudiantes de la carrera de Arquitectura de la Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas.

Tabla 2

Definición Operacional de la Variable Independiente

Variables	Instrumento
Variable independiente: Uso de la RA como herramienta interactiva.	Propuesta didáctica

Tabla 3

Definición Operacional de la Variable Dependiente

Variables	Indicadores	Instrumento
Variable dependiente: Nivel de aprendizaje de las aplicaciones de la integral definida en estudiantes de la carrera de Arquitectura de Ciencias Aplicadas.	- Nivel de desarrollo de la capacidad de interpretar la información basada en diferentes formatos. - Nivel de desarrollo de la capacidad de representar matemáticamente situaciones a partir de la información brindada. - Nivel de desarrollo de la capacidad de efectuar operaciones matemáticas mediante algoritmos. - Nivel de desarrollo de la capacidad de analizar los resultados obtenidos de la aplicación de métodos matemáticos. - Nivel de desarrollo de la capacidad de explicar las conclusiones de su razonamiento.	Prueba La evaluación estuvo conformada por 12 preguntas que miden los niveles de interpretar, representar, calcular, analizar y explicar en los estudiantes de la carrera de Arquitectura de la Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas.

CAPÍTULO III: METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

3.1. Diseño Metodológico

Enfoque de Investigación

El estudio empleó un enfoque cuantitativo. Según Hernández et al. (2014), “Utiliza la recolección de datos para probar hipótesis con base en la medición numérica y el análisis estadístico, con el fin establecer pautas de comportamiento y probar teorías.” (p. 36)

Tipo de Investigación

El tipo de investigación fue aplicada. Según Hernández et al. (2018), este tipo de investigación tiene como propósito resolver problemas prácticos y aportar mejoras a situaciones específicas dentro de contextos reales.

Nivel de Investigación

El estudio correspondió a un nivel cuasiexperimental, ya que se realizaron intervenciones y se observaron sus efectos en un entorno controlado, aunque sin la asignación aleatoria de los participantes (Hernández et al., 2014, p. 183). Cabe señalar que los estudiantes no fueron seleccionados de forma aleatoria, sino que se eligieron grupos ya formados.

Diseño de Investigación

El estudio adoptó un diseño experimental. Según Valderrama (2013), la investigación de naturaleza experimental se basa en la manipulación o inducción de fenómenos en entornos controlados, como laboratorios o ambientes artificiales, con el fin de observar sus efectos bajo condiciones específicas.

3.2. Diseño Muestral

Población

La muestra fue no probabilística e intencional, conformada por 42 estudiantes del tercer ciclo de la carrera de Arquitectura de la Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas. Se trabajó con dos grupos intactos (aulas), cada uno compuesto por 21 estudiantes, quienes presentaban características similares en cuanto a asistencia y rendimiento académico antes de la aplicación del pretest. Uno de los grupos fue asignado como experimental, mientras que el otro actuó como grupo de control.

Tabla 4

Grupo de Control y Grupo Experimental

Grado y sección	Sexo		Total
	H	M	
(Grupo Control)	10	11	21
(Grupo Experimental)	10	11	21

3.3. Técnicas de Recolección de Datos

La herramienta utilizada en esta investigación consistió en un examen de pretest y postest, administrado tanto al grupo experimental como al grupo de control, antes y después de desarrollar el tema y aplicar la propuesta didáctica basada en realidad aumentada (RA) al grupo experimental.

La validación del instrumento se realizó mediante un juicio de expertos, compuesto por profesionales universitarios en la especialidad de Matemática, cuyos detalles se presentaron en la siguiente tabla:

Tabla 5

Validez del Instrumento

Docentes	Prueba de pretest y postest
Dra. Yuliana Villarreal Montenegro (UPC)	19,00
Dra. Lourdes Gálvez Morales (ULima)	20,00
Dra. Jenny María Ruiz Salazar (UNFV)	17,50
Dr. Luis Fernando Velarde Vela (UPC)	19,00
Dr. Ivan Velasquez Millones (ESAN)	20,00
Promedio	19,10

En la tabla 5 se evidenció que la validez de la prueba de pretest y postest alcanzó una puntuación de 19,1 sobre 20, lo que la posicionó con una validez muy alta.

Para la validación de las hipótesis correspondientes a cada capacidad, se utilizó la prueba de Kolmogorov-Smirnov con el fin de determinar si los datos seguían una distribución normal. Dado que los datos no se ajustaron a una distribución normal, se empleó la prueba no paramétrica de Mann-Whitney.

3.4. Técnicas Estadísticas para el Procesamiento de Información

Para esta investigación se consideraron las medidas de tendencia central y las pruebas estadísticas aplicadas al conjunto de datos obtenidos de las pruebas administradas antes y después de desarrollar los temas. Estas pruebas fueron aplicadas tanto al grupo experimental, después de implementar la propuesta didáctica, como al grupo de control. Las medidas de tendencia central permitieron describir de manera resumida las características principales de los datos, mientras que las pruebas estadísticas se utilizaron para analizar y comparar los resultados entre los dos grupos, con el fin de determinar si la aplicación de la propuesta didáctica basada en la tecnología de realidad aumentada tuvo un efecto significativo en el rendimiento de los estudiantes.

3.5. Aspectos Éticos

La investigación y los planes de ejecución fueron presentados a la coordinadora de línea de la universidad con el objetivo de obtener la aprobación y autorización necesarias para llevar a cabo las actividades correspondientes. En cumplimiento con las normativas éticas y de privacidad, y siguiendo los lineamientos establecidos en el Manual de Tesis y Trabajos de Investigación de la Universidad San Martín, se utilizó una metodología rigurosa para la recopilación y análisis de datos. Para garantizar la confidencialidad y proteger la identidad de los estudiantes, se emplearon nombres genéricos en la presentación y descripción de los datos.

Además, tanto la citación como la referencia de todas las fuentes consultadas se realizaron de acuerdo con la normativa APA (7ª edición), asegurando que el trabajo cumpliera con los estándares internacionales de citación y referencia bibliográfica. Este enfoque permitió mantener la integridad del proceso de investigación, respetando la privacidad de los participantes y el cumplimiento de las normativas institucionales.

CAPÍTULO IV: RESULTADOS

Procesamiento de la Información

Se emplearon las capacidades desarrolladas por la Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas (UPC), adaptadas al aprendizaje de las aplicaciones de la integral definida, las cuales se basan en los escritos de la Asociación Americana de Colegios y Universidades de los Estados Unidos (AAC&U).

En este capítulo se presentaron los resultados de las pruebas aplicadas antes y después de la implementación de la propuesta didáctica (pretest y postest). Para abreviar, el nombre de cada capacidad se denominó de la siguiente manera:

- Capacidad 1: interpretar la información basada en diferentes formatos.
- Capacidad 2: representar matemáticamente situaciones a partir de la información brindada.
- Capacidad 3: efectuar operaciones matemáticas mediante algoritmos.

- Capacidad 4: analizar los resultados obtenidos de la aplicación de métodos matemáticos.

- Capacidad 5: explicar las conclusiones de su razonamiento.

A continuación, se presentaron los resultados de ambos grupos por capacidad, teniendo en cuenta que tanto el grupo de control como el grupo experimental fueron evaluados después de estudiar las aplicaciones de la integral definida. En el grupo de control, los temas se desarrollaron de forma tradicional, mientras que en el grupo experimental se aplicó la propuesta didáctica basada en el uso de la tecnología de realidad aumentada (RA).

Prueba Pretest – Postest

La prueba de pretest y postest fue aplicada a ambos grupos, experimental y de control. Cada grupo estuvo compuesto por 21 alumnos, quienes presentaron características similares en cuanto a asistencia y rendimiento.

A continuación, se indica la escala utilizada para la obtención de los resultados:

Tabla 6

Escala de Calificaciones

DIMENSIONES	INDICADORES	Insatis-factorio 0 ptos	Defi-ciente 1 pto	Regu-lar 2 ptos	Bien 3 ptos	Muy bien 4 ptos
Interpretación	Interpreta la información basada en diferentes formatos mediante la identificación de las secciones transversales de un sólido por secciones planas y reconoce un sólido de revolución.					
Representación	A partir de la información brindada representa el volumen de los sólidos por secciones planas y sólidos de revolución.					
Cálculo	Efectúa operaciones matemáticas mediante algoritmos, que permiten obtener la solución correcta y completa.					
Análisis	Analiza los resultados obtenidos de la aplicación de métodos matemáticos, dentro de un contexto real dado, llegando a conclusiones evidentes.					
Argumentación	Explica las conclusiones de su razonamiento con argumentos sencillos y evidentes, haciendo uso de un lenguaje adecuado.					

A.1 Capacidad: Interpretar la información basada en diferentes formatos

Tabla 7

Resultados de Notas de la Capacidad 1

	Cantidad de estudiantes por nota			
Notas	Pretest Grupo		Postest Grupo	
	Control	Experimental	Control	Experimental
0	6	8	0	0
1	4	4	5	0
2	8	8	6	7
3	1	1	9	8
4	2	0	1	6
Total	21	21	21	21
Mediana	2	1	2	3

La tabla 7 presentó los resultados del pretest y postest respecto a la capacidad de "interpretar la información basada en diferentes formatos". En ella, se observó que, en el pretest, el 50 % de los estudiantes del grupo de control obtuvieron 2 puntos o menos, mientras que el otro 50 % obtuvo 2 puntos o más; en el grupo experimental, el 50 % de los estudiantes obtuvo 1 punto o menos, y el otro 50 % obtuvo 1 punto o más. Sin embargo, en el postest, el grupo de control el 50 % de los estudiantes obtuvo 2 puntos o menos, y el otro 50 % obtuvo 3 puntos o más; mientras que, en el grupo de experimental el 50 % de los estudiantes obtuvo 3 puntos o menos, y el otro 50 % obtuvo 34 puntos.

A.2 Capacidad: Representar matemáticamente situaciones a partir de la información brindada.

Tabla 8

Resultados de Notas de la Capacidad 2

	Cantidad de estudiantes por nota			
Notas	Pretest Grupo		Postest Grupo	
	Control	Experimental	Control	Experimental
0	6	6	0	0
1	8	4	4	0
2	1	2	8	5
3	3	4	1	1
4	3	5	8	15
Total	21	21	21	21
Mediana	1	2	2	4

La tabla 8 presentó los resultados del pretest y postest respecto a la capacidad de "representar matemáticamente situaciones a partir de la información brindada". En ella, se observó que, en el pretest, el 50 % de los estudiantes del grupo de control obtuvo 1 punto o menos, y el otro 50 % obtuvo 1 punto o más; mientras que, en el grupo experimental, el 50 % de los estudiantes obtuvo 2 puntos o menos, y el otro 50 % obtuvo 2 puntos o más. Sin embargo, en el postest, en el grupo de control, el 50 % de los estudiantes obtuvo 2 puntos o menos, y el otro 50 % obtuvo 2 puntos o más; mientras que, en el grupo experimental, el 50 % de los estudiantes obtuvo 4 puntos o menos, y el otro 50 % obtuvo 4 puntos.

A.3 Capacidad: Efectuar operaciones matemáticas mediante algoritmos.

Tabla 9

Resultados de Notas de la Capacidad 3

	Cantidad de estudiantes por nota			
Notas	Pretest Grupo		Postest Grupo	
	Control	Experimental	Control	Experimental
0	9	7	1	0
1	4	6	1	0
2	8	8	6	2
3	0	0	10	11
4	0	0	3	8
Total	21	21	21	21
Mediana	1	1	3	3

La tabla 9 presentó los resultados del pretest y postest respecto a la capacidad de "efectuar operaciones matemáticas mediante algoritmos". En ella, se observó que, en el pretest, en los grupos de control y experimental, el 50 % de los estudiantes obtuvo 1 punto o menos, y el otro 50 % obtuvo 1 punto o más. Sin embargo, en el postest, en ambos grupos (control y experimental), el 50 % de los estudiantes obtuvo 3 puntos o menos, y el otro 50 % obtuvo 3 puntos o más.

A.4 Capacidad: Analizar los resultados obtenidos de la aplicación de métodos matemáticos

Tabla 10

Resultados de Notas de la Capacidad 4

Cantidad de estudiantes por nota				
Notas	Pretest Grupo		Postest Grupo	
	Control	Experimental	Control	Experimental
0	7	9	3	1
1	4	3	1	0
2	3	5	5	2
3	3	0	2	1
4	4	4	10	17
Total	21	21	21	21
Mediana	1	1	3	4

La tabla 10 presentó los resultados del pretest y postest respecto a la capacidad de "analizar los resultados obtenidos de la aplicación de métodos matemáticos". En ella, se observó que, en el pretest, en los grupos de control y experimental, el 50 % de los estudiantes obtuvo 1 punto o menos, y el otro 50 % obtuvo 1 punto o más (grupos de control y experimental). Sin embargo, en el postest, en el grupo de control, el 50 % de los estudiantes obtuvo 3 puntos o menos, y el otro 50 % obtuvo 3 puntos o más; mientras que, en el grupo experimental, el 50 % de los estudiantes obtuvo 4 puntos o menos, y el otro 50 % obtuvo 4 puntos.

A.5 Capacidad: Explicar las conclusiones de su razonamiento

Tabla 11

Resultados de Notas de la Capacidad 5

	Cantidad de estudiantes por nota			
Notas	Pretest Grupo		Postest Grupo	
	Control	Experimental	Control	Experimental
0	15	19	7	3
1	0	0	0	4
2	5	1	8	0
3	0	0	4	7
4	1	1	2	7
Total	21	21	21	21
Mediana	0	0	2	3

La tabla 11 presentó los resultados del pretest y postest respecto a la capacidad de "explicar las conclusiones de su razonamiento". En ella, se observó que, en el pretest, en los grupos de control y experimental, el 50 % de los estudiantes obtuvo 0 puntos, y el otro 50 % obtuvo 0 puntos o más. Sin embargo, en el postest, en el grupo de control, el 50 % de los estudiantes obtuvo 2 puntos o menos, y el otro 50 % obtuvo 2 puntos o más; mientras que, en el grupo experimental, el 50 % de los estudiantes obtuvo 3 puntos o menos, y el otro 50 % obtuvo 3 puntos o más.

Contrastación de Hipótesis

Para validar la hipótesis principal de la investigación, se procedió a validar las hipótesis derivadas.

Prueba de Normalidad.

Para determinar si las variables seguían una distribución normal, se aplicó la prueba de Shapiro-Wilk, la cual se basó en las siguientes premisas:

- Si sig > 0,05, entonces se puede afirmar que proviene de una distribución normal.
- Si sig < 0,05, entonces se puede afirmar que no proviene de una distribución normal.

Luego de aplicar la prueba de Shapiro-Wilk a las cinco capacidades fundamentales del área de matemáticas en el grupo experimental, se obtuvieron los resultados que se presentaron en la tabla 12.

Tabla 12

Resultados de Prueba de Normalidad de Shapiro – Wilk – Grupo Experimental

Capacidad	Estadístico	gl	Sig.
C1: Interpretar la información basada en diferentes formatos.	,808	21	,001
C2: Representar matemáticamente situaciones a partir de la información brindada	,838	21	,000
C3: Efectuar operaciones matemáticas mediante algoritmos.	,839	21	,000
C4: Analizar los resultados obtenidos de la aplicación de métodos matemáticos.	,761	21	,000
C5: Explicar las conclusiones de su razonamiento.	,847	21	,001

Después de obtener los resultados de cada una de las cinco capacidades fundamentales del área de matemáticas, se observó que el valor de significancia fue menor a 0,05 (sig < 0,05). Por lo tanto, se concluyó que los datos no provenían de una distribución normal.

Asimismo, al aplicar la prueba de Shapiro-Wilk a las cinco capacidades fundamentales del área de matemáticas en el grupo de control, se obtuvieron los resultados que se presentaron en la tabla 13.

Tabla 13

Resultados de Prueba de Normalidad de Shapiro – Wilk – Grupo Control

Capacidades	Estadístico	gl	Sig.
C1: Interpretar la información basada en diferentes formatos.	,831	21	,004
C2: Representar matemáticamente situaciones a partir de la información brindada.	,799	21	,001
C3: Efectuar operaciones matemáticas mediante algoritmos.	,864	21	,004
C4: Analizar los resultados obtenidos de la aplicación de métodos matemáticos.	,767	21	,001
C5: Explicar las conclusiones de su razonamiento.	,847	21	,004

Dado que cada una de las cinco capacidades fundamentales del área de matemáticas presentó un valor de significancia menor a 0,05 (sig < 0,05), se concluyó que los datos no provenían de una distribución normal.

Validación de Hipótesis

Hipótesis Principal

La aplicación de la propuesta didáctica basada en el uso de la RA como herramienta de apoyo, influye significativamente en la mejora del nivel de aprendizaje de las aplicaciones de la integral definida en los estudiantes de la carrera de Arquitectura de la Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas.

Hipótesis derivadas

Como las capacidades no provienen de una distribución normal, se aplicó la prueba de Mann Whitney, teniendo presente la siguiente regla de decisión:

Si $Z_{\textbf{\textit{obtenido}}} \geq Z_{\textbf{\textit{crítico}}}$ o p <0,05 (p: nivel de significancia) entonces se rechaza H_0 y por lo tanto se acepta H_1.

Además, según la tabla estadística de la distribución normal al 95% de confianza, el $Z_{\textbf{\textit{crítico}}}$= 1,96.

A continuación, se presentó la validación de cada una de las hipótesis derivadas.

Hipótesis Derivada 1:

La aplicación de la propuesta didáctica basada en el uso de la RA influye significativamente en el desarrollo de la capacidad de “interpretar la información basada en diferentes formatos” para el aprendizaje de las aplicaciones de la integral definida en estudiantes de la carrera de Arquitectura de la Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas.

Para verificar la hipótesis derivada 1, se procedió a validar la aceptación o el rechazo de la hipótesis nula descrita a continuación.

Hipótesis Derivada 1:

H_O: Los puntajes de las poblaciones del grupo experimental y el grupo control, en la medición de la capacidad de "interpretar la información basada en diferentes formatos", se distribuyen de manera idéntica.

$H_{a:}$ Los puntajes de las poblaciones del grupo experimental y el grupo control, en la medición de la capacidad de "interpretar la información basada en diferentes formatos", no se distribuyen de manera idéntica.

Tabla 14

Mann Whitney – Capacidad 1

	Grupos	N	Rango promedio	Suma de rangos
Notas	Notas - Grupo control	21	17,57	369,00
	Notas - Grupo experimental	21	25,43	534,00
	Total	42		
		Estadísticos de Notas		
Z				-2,190
Sig. asintótica (bilateral)				,029

Como se observó en la tabla 14, el valor de z obtenido resultó $Z_{obtenido}$= - 2,190. Luego, / $Z_{obtenido}$/= /-2,190/ ≥ / $Z_{crítico}$/ = /1,96/ o p = 0,029<0,05. De esta manera se rechazó H_0 y se aceptó H_1.

De acuerdo con los resultados obtenidos, se concluyó que existió evidencia suficiente para afirmar que las distribuciones de las puntuaciones de los dos grupos fueron diferentes. Esto indicó que la aplicación de la propuesta didáctica basada en el uso de la realidad aumentada (RA) influyó significativamente en el desarrollo de la capacidad de “interpretar la información basada en diferentes formatos” para el aprendizaje de las aplicaciones de la integral definida en estudiantes de la carrera de Arquitectura de la Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas. Se determinó que dicha estrategia didáctica resultó más eficaz en comparación con las estrategias tradicionales, en las que la información se presentó en formatos convencionales, como gráficos en el plano o a partir de las reglas de correspondencia de las funciones. Además, se observó que la falta de una perspectiva geométrica impidió que los estudiantes interactuaran con el sólido y adquirieran una experiencia más vivencial.

Hipótesis Derivada 2:

La aplicación de la propuesta didáctica basada en el uso de la RA influye significativamente en el desarrollo de la capacidad de “representar matemáticamente situaciones a partir de la información brindada” para el aprendizaje de las aplicaciones de la integral definida en estudiantes de la carrera de Arquitectura de la Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas.

Para verificar la hipótesis derivada 2, se procedió a validar la aceptación o el rechazo de la hipótesis nula descrita a continuación.

Hipótesis Derivada 2:

H_O: Los puntajes de las poblaciones del grupo experimental y el grupo control, en la medición de la capacidad de “representar matemáticamente situaciones a partir de la información brindada”, se distribuyen de manera idéntica.

$H_{a:}$ Los puntajes de las poblaciones del grupo experimental y el grupo control, en la medición de la capacidad de “representar matemáticamente situaciones a partir de la información brindada”, no se distribuyen de manera idéntica.

Tabla 15

Mann Whitney – Capacidad 2

	Grupos	N	Rango promedio	Suma de rangos
Notas	Notas - Grupo control	21	17,36	364,50
	Notas - Grupo experimental	21	25,64	538,50
	Total	42		
	Estadísticos de Notas			
Z				-2,438
Sig. asintótica (bilateral)				,015

En la tabla 15 se observó que el valor de *z* obtenido mediante el procesador estadístico SPSS versión 24 resultó $Z_{obtenido}$= - 2,438.

Luego, / $Z_{obtenido}$/= /-2,438/ ≥ / $Z_{crítico}$/ = /1,96/ o *p* = 0,015 <0,05. De esta manera, se rechazó H_0 y se aceptó H_1.

De acuerdo con los resultados obtenidos, se concluyó que existió evidencia suficiente para afirmar que las distribuciones de las puntuaciones de los dos grupos fueron diferentes. Esto indicó que la aplicación de la propuesta didáctica basada en el uso de la realidad aumentada (RA) influyó significativamente en el desarrollo de la capacidad de “representar matemáticamente situaciones a partir de la información brindada” para el aprendizaje de las aplicaciones de la integral definida en estudiantes de la carrera de Arquitectura de la Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas. Se determinó que dicha estrategia didáctica resultó más eficaz en comparación con las estrategias tradicionales. Además, se observó que, al no desarrollar la abstracción, los estudiantes tendieron a memorizar las fórmulas matemáticas sin comprender su planteamiento.

Hipótesis Derivada 3:

La aplicación de la propuesta didáctica basada en el uso de la RA influye significativamente en el desarrollo de la capacidad de “efectuar operaciones matemáticas mediante algoritmos” para el aprendizaje de las aplicaciones de la integral definida en estudiantes de la carrera de Arquitectura de la Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas.

Para verificar la hipótesis derivada 3, se procedió a validar la aceptación o el rechazo de la hipótesis nula descrita a continuación.

Hipótesis Derivada 3:

H_O: Los puntajes de las poblaciones del grupo experimental y el grupo control, en la medición de la capacidad de “efectuar operaciones matemáticas mediante algoritmos”, se distribuyen de manera idéntica.

H_a: Los puntajes de las poblaciones del grupo experimental y el grupo control, en la medición de la capacidad de "efectuar operaciones matemáticas mediante algoritmos", no se distribuyen de manera idéntica.

Tabla 16

Mann Whitney – Capacidad 3

	Grupos	N	Rango promedio	Suma de rangos
Notas	Notas - Grupo control	21	17,29	363,00
	Notas - Grupo experimental	21	25,71	540,00
	Total	42		
		Estadísticos de Notas		
Z				-2,414
Sig. asintótica (bilateral)				,016

En la tabla 16 se observó que el valor de *z* obtenido mediante el procesador estadístico SPSS versión 24 resultó $Z_{obtenido}$= - 2,414.

Luego, / $Z_{obtenido}$/= /-2,414/ ≥ / $Z_{crítico}$/ = /1,96/ o p = 0,016 <0,05. De esta manera se rechazó H_0 y se aceptó H_1.

De acuerdo con los resultados obtenidos, se concluyó que existió evidencia suficiente para afirmar que las distribuciones de las puntuaciones de los dos grupos fueron diferentes. Esto indicó que la propuesta didáctica basada en el uso de la RA influyó significativamente en el desarrollo de la capacidad de "efectuar operaciones matemáticas mediante algoritmos" para el aprendizaje de las aplicaciones de la integral definida en estudiantes de la carrera de Arquitectura de la Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas. Se determinó que dicha estrategia didáctica fue más eficaz, ya que permitió realizar los cálculos matemáticos de manera correcta, en comparación con las estrategias tradicionales que tendían a basarse en la memorización para el aprendizaje de los conceptos.

Hipótesis Derivada 4:

La aplicación de la propuesta didáctica basada en el uso de la RA influye significativamente en el desarrollo de la capacidad de “analizar los resultados obtenidos de la aplicación de métodos matemáticos” para el aprendizaje de las aplicaciones de la integral definida en estudiantes de la carrera de Arquitectura de la Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas.

Para verificar la hipótesis derivada 4, se procedió a validar la aceptación o el rechazo de la hipótesis nula descrita a continuación.

Hipótesis Derivada 4:

H_O: Los puntajes de las poblaciones del grupo experimental y el grupo control, en la medición de la capacidad de “analizar los resultados obtenidos de la aplicación de métodos matemáticos”, se distribuyen de manera idéntica.

$H_{a:}$ Los puntajes de las poblaciones del grupo experimental y el grupo control, en la medición de la capacidad de “analizar los resultados obtenidos de la aplicación de métodos matemáticos”, no se distribuyen de manera idéntica.

Tabla 17

Mann Whitney – Capacidad 4

	Grupos	N	Rango promedio	Suma de rangos
Notas	Notas - Grupo control	21	17,88	375,50
	Notas - Grupo experimental	21	25,12	527,50
	Total	42		
	Estadísticos de Notas			
Z				-2,239
Sig. asintótica (bilateral)				,025

En la tabla 17 se observó que el valor de *z* obtenido mediante el procesador estadístico SPSS versión 24 resultó $Z_{obtenido}$= - 2,239.

Luego, / $Z_{obtenido}$/= /-2,239/ ≥ / $Z_{crítico}$/ = /1,96/ o p = 0,025 <0,05. De esta manera se rechazó H_0 y se aceptó H_1,

De acuerdo con los resultados obtenidos, se concluyó que existió evidencia suficiente para afirmar que las distribuciones de las puntuaciones de los dos grupos fueron diferentes. Esto indicó que la aplicación de la propuesta didáctica basada en el uso de la RA influyó significativamente en el desarrollo de la capacidad de “analizar los resultados obtenidos de la aplicación de métodos matemáticos” para el aprendizaje de las aplicaciones de la integral definida en estudiantes de la carrera de Arquitectura de la Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas. Se determinó que dicha estrategia didáctica fue más eficaz, ya que permitió comprender la aplicación de los conceptos matemáticos en situaciones reales, en comparación con las estrategias tradicionales que se enfocaban en la memorización de fórmulas y no relacionaban la matemática con el mundo real. No obstante, con la ayuda de la propuesta didáctica basada en la RA, los estudiantes pudieron relacionar los conceptos teóricos con situaciones contextualizadas, lo que les permitió sentirse más motivados a aprender e interactuar con las herramientas tecnológicas.

Hipótesis Derivada 5:

$H_{1:}$ La aplicación de la propuesta didáctica basada en el uso de la RA influye significativamente en el desarrollo de la capacidad de "explicar las conclusiones de su razonamiento" para el aprendizaje de las aplicaciones de la integral definida en estudiantes de la carrera de Arquitectura de la Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas.

Para verificar la hipótesis derivada 5, se procedió a validar la aceptación o el rechazo de la hipótesis nula descrita a continuación.

Hipótesis Derivada 5:

H_O: Los puntajes de las poblaciones del grupo experimental y el grupo control, en la medición de la capacidad de "explicar las conclusiones de su razonamiento", se distribuyen de manera idéntica.

$H_{a:}$ Los puntajes de las poblaciones del grupo experimental y el grupo control, en la medición de la capacidad de "explicar las conclusiones de su razonamiento", no se distribuyen de manera idéntica.

Tabla 18

Mann Whitney – Capacidad 5

	Grupos	N	Rango promedio	Suma de rangos
Notas	Notas - Grupo control	21	17,83	374,50
	Notas - Grupo experimental	21	25,17	528,50
	Total	42		
		Estadísticos de Notas		
Z				-1,986
Sig. asintótica (bilateral)				,047

Por último, en la tabla 18, el valor de *z* obtenido mediante el procesador estadístico SPSS versión 24, resultó $Z_{\textbf{\textit{obtenido}}}$= - 1,986. Luego, / $Z_{\textbf{\textit{obtenido}}}$/= /-1,986/ ≥ / $Z_{\textbf{\textit{crítico}}}$/ = /1,96/ o *p* = 0,047 <0,05. De esta manera se rechazó H_0 y se aceptó H_1.

De acuerdo con los resultados obtenidos, se concluyó que existió evidencia suficiente para afirmar que las distribuciones de las puntuaciones de los dos grupos fueron diferentes, es decir, que la aplicación de la propuesta didáctica basada en el uso de la RA influyó significativamente en el desarrollo de la capacidad de “explicar las conclusiones de su razonamiento” para el aprendizaje de las aplicaciones de la integral definida en estudiantes de la carrera de Arquitectura de la Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas. Se determinó que dicha estrategia didáctica fue más eficaz, ya que desarrolló el pensamiento crítico y permitió una comprensión más profunda de la situación en un contexto real, en comparación con las estrategias tradicionales, que eran de enfoque individualista y tendían a evaluar solo la respuesta correcta. Con la ayuda de la propuesta didáctica basada en la RA, el estudiante tomó decisiones y explicó de manera coherente sus razones.

CAPÍTULO V: DISCUSIÓN

De acuerdo con la prueba de entrada y salida utilizada en la investigación, se demostró que la propuesta didáctica basada en el uso de la RA como herramienta de apoyo influye significativamente en el aprendizaje de las aplicaciones de la integral definida en los estudiantes de la carrera de Arquitectura de la Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas.

Después de validar las hipótesis derivadas, se verificó la hipótesis principal. Se demostró que la estrategia didáctica basada en el uso de la RA resultó ser más eficaz para la enseñanza de las aplicaciones de la integral definida en comparación con las estrategias tradicionales. Esta propuesta didáctica facilitó la comprensión y abstracción de los sólidos de revolución, así como de los sólidos generados a partir de sus secciones planas, mediante el uso de herramientas tecnológicas como GeoGebra y ArCore.

Estos resultados coincidieron con los estudios realizados por Martín (2019), quien demostró que la mediación de la RA generó espacios de aprendizaje transdisciplinar. Dichos espacios se reflejaron en las relaciones establecidas por los estudiantes entre concepto-objeto, concepto-aplicación y concepto-situación.

La primera hipótesis derivada planteaba que la propuesta didáctica basada en el uso de la RA influiría significativamente en el desarrollo de la capacidad de interpretar la información basada en diferentes formatos para el aprendizaje de las aplicaciones de la integral definida, en los estudiantes universitarios de la carrera de Arquitectura de la Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas. De acuerdo con la tabla 14, el valor de z obtenido fue $/ Z_{obtenido}/ = /-2{,}190/ \geq / Z_{crítico}/ = /1{,}96/$ o $p = 0{,}029 < 0{,}05$. Esto indicó que se rechazó la hipótesis nula (H_0) y se aceptó la hipótesis alternativa (H_1). Es decir, la estrategia didáctica resultó ser más eficaz en comparación con las estrategias tradicionales, en las cuales la información se presenta en formatos convencionales, como gráficos en el plano o a partir de las reglas de correspondencias de las funciones. Además, la falta de una perspectiva geométrica limitó la interacción del estudiante con los sólidos, impidiendo que adquiriera una experiencia más vivencial y enriquecedora.

Este hallazgo se complementó con el estudio de Joo (2016), en el cual se evidenció que el desarrollo de la inteligencia espacial puede verse favorecido con la implementación de tecnologías móviles. Estas tecnologías permiten fortalecer el sentido de las relaciones espaciales, la visualización y la orientación. El estudio de Joo afirma que el desarrollo de la inteligencia espacial fortalece el razonamiento visual y permite la comprensión de información en otros contextos (geométrico, gráfico).

De forma similar, la segunda hipótesis especificaba que la propuesta didáctica basada en el uso de la RA influiría significativamente en el desarrollo de la capacidad de representar matemáticamente situaciones a partir de la información brindada para el aprendizaje de las aplicaciones de la integral definida, en estudiantes de la carrera de Arquitectura de la Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas. De acuerdo con la tabla 15, el valor de z obtenido fue / $Z_{obtenido}$/ = /-2,438/ ≥ / $Z_{crítico}$/ = /1,96/ o p = 0,015 < 0,05. Esto indicó que se rechazó la hipótesis nula (H_0) y se aceptó la hipótesis alternativa (H_1). Es decir, la estrategia didáctica resultó ser más eficaz, en comparación con las estrategias tradicionales. Al no desarrollar la abstracción, los estudiantes tendieron a memorizar las fórmulas matemáticas sin entender su planteamiento. En ese sentido, se coincidió con Cubillo (2014), quien señaló que la particularización de los recursos digitales basados en el uso de la RA puede ser empleada por cualquier usuario sin necesidad de tener algún conocimiento de programación. Esto implicó que los estudiantes con dificultades en la comprensión del planteamiento de las fórmulas pudieran beneficiarse y alcanzar las competencias deseadas.

Al analizar la tercera hipótesis derivada, se observó que la propuesta didáctica basada en el uso de la RA influiría significativamente en el desarrollo de la capacidad de efectuar operaciones matemáticas mediante algoritmos para el aprendizaje de las aplicaciones de la integral definida, en los estudiantes de la carrera de Arquitectura de la Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas. Según la tabla 16, el valor de z obtenido fue / $Z_{obtenido}$/ = /-2,414/ ≥ / $Z_{crítico}$/ = /1,96/ o p = 0,016 < 0,05. Esto indicó que se rechazó la hipótesis nula (H_0) y se aceptó la hipótesis alternativa (H_1). Es decir, dicha estrategia didáctica resultó ser más eficaz porque permitió realizar los cálculos matemáticos de manera correcta sin errores en el planteamiento, en comparación con las estrategias tradicionales que tendieron a utilizar la memorización para el aprendizaje de los conceptos, sin entenderlos. Esto coincidió con Martin (2019), quien señaló que el uso oportuno de la RA en el proceso de enseñanza-aprendizaje permitió el intercambio de información, lo cual favoreció la apropiación de conceptos como funciones, gráficas de funciones, dominios, rangos, máximos y mínimos. De esta manera, se logró un incremento estadístico favorable en el desempeño de los estudiantes.

Al examinar la cuarta hipótesis derivada, se concluyó que la propuesta didáctica basada en el uso de la RA influiría significativamente en el desarrollo de la capacidad de analizar los resultados obtenidos de la aplicación de métodos matemáticos para el aprendizaje de las aplicaciones de la integral definida, en los estudiantes de la carrera de Arquitectura de la Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas. Según la tabla 17, el valor de z obtenido fue $/ Z_{obtenido}/ = /-2{,}239/ \geq / Z_{crítico}/ = /1{,}96/$ o $p = 0{,}025 < 0{,}05$. Esto indicó que se rechazó la hipótesis nula (H_0) y se aceptó la hipótesis alternativa (H_1). Es decir, dicha estrategia didáctica resultó ser más eficaz porque permitió comprender la aplicación de los conceptos matemáticos en situaciones reales y analizar los diferentes escenarios que se presentaron en el desarrollo de este en comparación con las estrategias tradicionales, que se enfocaron en la memorización de fórmulas y no relacionaron la matemática con el mundo real. En esta línea de pensamiento, se coincidió con Cubillo (2014) en cuanto al uso de los recursos digitales, atendiendo el perfil del estudiante al que se dirige a través de la contextualización.

Finalmente, la quinta hipótesis derivada señalaba que la propuesta didáctica basada en el uso de la RA influiría significativamente en el desarrollo de la capacidad de explicar las conclusiones de su razonamiento para el aprendizaje de las aplicaciones de la integral definida, en estudiantes de la carrera de Arquitectura. Según la tabla 18, el valor de z obtenido fue $/ Z_{obtenido}/ = /-1,986/ \geq / Z_{crítico}/ = /1,96/$ o $p = 0,047 < 0,05$. Esto indicó que se rechazó la hipótesis nula (H_0) y se aceptó la hipótesis alternativa (H_1), lo que significa que dicha estrategia didáctica resultó ser más eficaz, en comparación con las estrategias tradicionales, las cuales no aplican estos conceptos en situaciones contextualizadas. Sin embargo, con la ayuda de la propuesta didáctica basada en la RA, el estudiante tomó una decisión y explicó de manera coherente sus razones. En tal sentido, se coincidió con Joo (2016), quien afirmó que la implementación de la tecnología de la RA en un contexto móvil fortaleció el sentido de las relaciones espaciales y facilitó la comprensión en otros contextos.

CONCLUSIONES

- La propuesta didáctica basada en el uso de la realidad aumentada (RA) como herramienta de apoyo influyó significativamente en el nivel de aprendizaje de las aplicaciones de la integral definida en estudiantes de la carrera de Arquitectura de la Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas.

- La propuesta didáctica basada en el uso de la RA influyó significativamente en el desarrollo de la capacidad para interpretar la información presentada en diferentes formatos, facilitando el aprendizaje de las aplicaciones de la integral definida en los estudiantes de la carrera de Arquitectura de la Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas. El valor de z obtenido fue $/ Z\_{obtenido}/ = /-2{,}190/ \geq / Z\_{crítico}/ = /1{,}96/$ o $p = 0{,}029 < 0{,}05$, lo que implicó que se rechazó H_0 y, por lo tanto, se aceptó H_1.

- La propuesta didáctica basada en el uso de la RA influyó significativamente en el desarrollo de la capacidad para representar matemáticamente situaciones a partir de la información brindada, facilitando el aprendizaje de las aplicaciones de la integral definida en los estudiantes de la carrera de Arquitectura de la Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas. El valor de z obtenido fue / $Z\_{obtenido}$/ = /-2,438/ ≥ / $Z\_{crítico}$/ = /1,96/ o p = 0,015 < 0,05, lo que implicó que se rechazó H_0 y, por lo tanto, se aceptó H_1.

- La propuesta didáctica basada en el uso de la RA influyó significativamente en el desarrollo de la capacidad de efectuar operaciones matemáticas mediante algoritmos para el aprendizaje de las aplicaciones de la integral definida en los estudiantes de la carrera de Arquitectura de la Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas. El valor de z obtenido fue / $Z\_{obtenido/}$ = /-2,414/ ≥ / $Z\_{crítico}$/ = /1,96/ o p = 0,016 < 0,05, lo que implicó que se rechazó H_0 y, por lo tanto, se aceptó H_1.

- La propuesta didáctica basada en el uso de la RA influyó significativamente en el desarrollo de la capacidad para analizar los resultados obtenidos de la aplicación de métodos matemáticos en el aprendizaje de las aplicaciones de la integral definida en los estudiantes de la carrera de Arquitectura de la Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas. El valor de z obtenido fue / $Z\_{obtenido}$/ = /-2,239/ ≥ / $Z\_{crítico}$/ = /1,96/ o p = 0,025 < 0,05, lo que implicó que se rechazó H_0 y, por lo tanto, se aceptó H_1.

- La propuesta didáctica basada en el uso de la RA influyó significativamente en el desarrollo de la capacidad para explicar las conclusiones de su razonamiento en el aprendizaje de las aplicaciones de la integral definida en los estudiantes de la carrera de Arquitectura de la Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas. El valor de z obtenido fue / $Z\_{obtenido}$/ = /-1,986/ ≥ / $Z\_{crítico}$/ = /1,96/ o p = 0,047 < 0,05, lo que implicó que se rechazó H_0 y, por lo tanto, se aceptó H_1.

RECOMENDACIONES

- Se recomienda a los docentes de matemáticas de las universidades emplear materiales didácticos basados en la realidad aumentada (RA), con el fin de facilitar la enseñanza de conceptos matemáticos abstractos e innovar en sus enfoques pedagógicos (ver Anexo 4).

- Se sugiere a los docentes universitarios aplicar estrategias didácticas innovadoras, en función del diagnóstico realizado en esta investigación, para mejorar sus métodos de enseñanza (ver Anexo 5).

- Se invita a los estudiantes universitarios de Arquitectura a revisar la propuesta didáctica basada en el uso de la RA (ver Anexo 2), con el objetivo de vincular los conocimientos adquiridos con su futura práctica profesional.

FUENTES DE INFORMACIÓN

Altamirano, I. A. (2022). *La realidad aumentada como herramienta de enseñanza en el aprendizaje de vectores*. [Tesis de Maestría, Universidad Técnica de Ambato]. https://repositorio.uta.edu.ec/handle/123456789/36419

Andraca-Sanchez, C., Muñoz-Garcia, A. H., & Gonzalez-Gonzalez, J. (2022). Factores asociados a la disrupción de la educación presencial por la covid-19: alumnado de enseñanza superior hacia la educación virtual. *Educatio Siglo XXI, 40*(1), 153-178. https://doi.org/10.6018/educatio.440391

Alomá, M., Crespo, L., González, K., & Estévez, N. (2022). Fundamentos cognitivos y pedagógicos del aprendizaje activo. *Mendive. Revista de Educación*, *20*(4), 1353-1368.http://scielo.sld.cu/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1815-76962022000401353&lng=es&tlng=es.

Andrade, C. A. A., Quijano, O. F. P., & Molina, R. C. (2019). La falta de enseñanza de la geometría en el nivel medio y su repercusión en el nivel universitario: análisis del proceso de nivelación de la Universidad Técnica de Manabí. *ReHuSo: Revista de Ciencias Humanísticas y Sociales, 4*(1), 20-31.

American Association of Colleges and Universities [AAC&U] (2009). *Quantitative literacy value rubric.* https://www.aacu.org/initiatives/value-initiative/value-rubrics/value-rubrics-quantitativeliteracy

Amri, S. and Widada, W. (2019). *The role of self-efficacy and mathematics ability in the problem-solving mathematics. Proceedings of the International Conference on Educational Sciences and Teacher Profession*. https://doi.org/10.2991/icetep-18.2019.17

Aslam, N., Siddiquah, A., & Islam, M. u. (2020). Conceptualization of numbers, number operations, and algebra among 10th and 11th grade students. Global Social Sciences Review, V(I), 291-299. https://doi.org/10.31703/gssr.2020(v-i).30

Azuma, R. T. (1997). survey of augmented reality. *Presence: Teleoperators and virtual environments, 6* (4), 355-385.

Basogain, X., Olabe, M., Espinosa, K., Rouèche, C., & Olabe, J. C. (2007). Realidad aumentada en la Educación: una tecnología emergente. *Educa Madrid, 7*, 24-29.

Blomhøj, M. (2021). Modelización matemática - una teoría para la práctica. *Revista De Educación Matemática, 23*(2). https://doi.org/10.33044/revem.10419

Blanco, T. F., Diego-Mantecón, J. M., & Sequeiros, P. G. (2019). Procesos de visualización en una tarea de generación y representación de cuerpos de revolución. *Bolema: Boletim De Educação Matemática, 33*(64), 768-789. https://doi.org/10.1590/1980-4415v33n64a16

Caballero-Garriazo, J. R., Rojas-Huacanca, A., Sánchez-Castro, F., & Lázaro-Aguirre, T. (2023). Systematic review on the application of Virtual Reality in University Education. *Revista Electrónica Educare*, *27*(3), 1-18. https://doi.org/10.15359/ree.27-3.17271

Caballero, N., Melo, L. A., & Reyes, J. K. (2018). *REALIDAD AUMENTADA: tecnología para el desarrollo del pensamiento espacial (transformaciones) en estudiantes del grado 101 sede Puerta al Llano de la IED Ciudad de Villavicencio*. [Tesis de Maestría, Universidad Libre Colombia]. https://hdl.handle.net/10901/11612

Cabero-Almenara, J., Vázquez-Cano, E., & López-Meneses, E. (2018). Uso de la realidad aumentada como recurso didáctico en la enseñanza universitaria. *Formación universitaria, 11*(1), 25-34. S. XXI.

Calderón, M., & Loja, H. (2018). Un cambio imprescindible: el rol del docente en el siglo XXI. *ILLARI, 6*, 35-40. https://www.aacademica.org/margarita.calderon/2.pdf

Cardozo, M. S. (2022). Uso de las TIC en el proceso de enseñanza- aprendizaje en estudiantes del primer y segundo ciclo de la educación escolar básica. *Ciencia Latina Revista Científica Multidisciplinar*, *6*(6), 8354-8371. https://doi.org/10.37811/cl_rcm.v6i6.4002

Caswell, C. J. and LaBrie, D. J. (2017). Inquiry based learning from the learner's point of view: a teacher candidate's success story. Journal of Humanistic Mathematics, 7(2), 161-186. https://doi.org/10.5642/jhummath.201702.08

Cubillo, A. J. (2014) Arle: una herramienta de autor para entornos de aprendizaje de realidad aumentada. [Tesis de Doctorado, Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Telecomunicación de Valladolid]. https://hdl.handle.net/20.500.14468/21213

Emst-Slavit, G. (2001). Educación para todos: la teoría de las inteligencias múltiples de gardner. *Revista De Psicología, 19*(2), 319-332. https://doi.org/10.18800/psico.200102.006

Fonseca, M. A., & Felipe, J. (2020). El papel de las competencias matemáticas en el nuevo modelo educativo para el contexto colombiano. *Trans-Pasando Fronteras, 16.* https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=7811925

Forero, B. G., & Pineda, J. M. M. (2013). Tendencias actuales en la enseñanza de la Matemática Desde la perspectiva de la didáctica en la educación terciaria. *Poliantea, 6*(11).

Gallego (2018). *Modelo para el análisis de aplicaciones visuales educativas en realidad aumentada desde la perspectiva de la semiótica visual*. [Tesis de Doctorado, Universitat Oberta de Catalunya]. https://tdx.cat/handle/10803/667112#page=1

Garay, I. S., & Quintana, M. (2023). Percepción de la comunidad educativa sobre la estimulación de las habilidades para el siglo XXI. *Revista Electrónica de Investigación Educativa, 25*, 1-11. https://doi.org/10.24320/redie.2023.25.e03.4326

Gazzola, M. P., Otero, M. R., & Llanos, V. C. (2021). Recorrido de estudio e investigación en física y matemáticas en la escuela secundaria. *Praxis &Amp; Saber, 12*(31), e11151. https://doi.org/10.19053/22160159.v12.n31.2021.11151

Gómez, J, A. (2001). Nuevos planteamientos metodológicos en la enseñanza de la geometría. Geometría dinámica con Cabri. *Actas del Congreso Internacional de Ingeniería Gráfica XVI*, *5* (6).

González, J. I., & Granera, J. (2021). Entornos virtuales de aprendizaje (eva) para la enseñanza-aprendizaje de la matemática. *Revista Científica De FAREM-Estelí*, 49-62. https://doi.org/10.5377/farem.v0i0.11607

Gutierrez, M. A., & Peraza, A. (2023). Análisis de herramientas para gamificar en la enseñanza de las matemáticas. *Revista Digital De Tecnologías Informáticas y Sistemas, 7(*1), 1-8. https://doi.org/10.61530/redtis.vol7.n1.2023.183.1-8

Halanoca, D. (2024). Aprendizaje Significativo en la educación superior. *Horizontes. Revista De Investigación En Ciencias De La Educación*, *8*(34), 1714–1726. https://doi.org/10.33996/revistahorizontes.v8i34.828

Herrera, M., Guzmán, J. I., & Rodríguez, C, (2020). *Desarrollando habilidades de visualización espacial a través de la realidad aumentada en el aprendizaje del cálculo en varias variables.* Universidad del Desarrollo, Chile.

Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación. (2015). *Módulo de Razonamiento cuantitativo. Instituto Colombiano Para La Evaluación de La Educación.* https://www.icfes.gov.co/web/guest/searchicfes?_com_liferay_portal_search_web_search_bar_portlet_SearchBarPortlet_formDate=1669098027904&start=1&_com_liferay_portal_search_web_search_bar_portlet_SearchBarPortlet_emptySearchEnabled=true&q=razonamiento+cua

Joo, J.C (2016). *Modelo de realidad aumentada y navegación peatonal del patrimonio territorial: Diseño, implementación y evaluación educativa.* [Tesis de Doctorado, Universidad de Salamanca]. http://repositorio.grial.eu/handle/grial/634

López, H. (2020). Realidad aumentada como andamiaje para la comprensión del concepto de función cuadrática en el nivel medio superior. *Benemérita Universidad Autónoma de Puebla,* 244-278.

López, W. (2018). Incorporación de tecnologías en la enseñanza de las matemáticas: actitudes del estudiantado universitario. *Horizontes Pedagógicos, 19*(1), 21-30. https://doi.org/10.33881/0123-8264.hop.19103

León-Velarde, C., Aparicio, P., Narro, M., Morales, G., & Vega, M. (2024). Realidad Aumentada Como Herramienta Motivadora En Estudiantes De Ingeniería De Sistemas En Una Universidad Pública. *Aula Virtual*, *5*(12), e311. https://doi.org/10.5281/zenodo.11504361

Martínez, O. M., Mejía, E., Ramírez, W. R., & Rodríguez, T. D. (2021). Incidencia de la realidad aumentada en los procesos de aprendizaje de las funciones matemáticas. *Información tecnológica, 32*(3), 3-14.

Martín, J. Y. (2019). *Aprendizaje transdisciplinar de las ciencias matemáticas mediado por realidad aumentada en Programas de Ingeniería.* [Tesis de Doctorado, Universidad Santo Tomás]. http://hdl.handle.net/11634/15117

Miranda, I., & Gard, E. G. (2020). Una propuesta innovadora de inclusión de valores morales en la enseñanza de matemáticas. Enseñanza De Las Ciencias. *Revista De Investigación Y Experiencias Didácticas, 38*(1), 183-196. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3034

Montecé-Mosquera, F., Verdesoto-Arguello, A., Montecé-Mosquera, C., & Caicedo-Camposano, C. (2017). Impacto de la realidad aumentada en la educación del siglo XXI. *European Scientific Journal, ESJ, 13*(25), 129-137.

Morales, G. (2022). *Desarrollo de la inteligencia espacial a través de la realidad aumentada en áreas de conocimiento STEM. Proyecto de investigación.* [Tesis de Doctorado, Universidad de Murcia]. https://portalinvestigacion.um.es/documentos/63bc334a3035a915c707c95b

Muñoz, J., Arce, M.,& Conejo, L.(2019). *Aprendizaje y enseñanza de las matemáticas*. Editorial Sínteses.

https://www.researchgate.net/publication/332471459_Aprendizaje_y_ensenanza_de_las_matematicas

Naranjo, J. E., Robalino-López, A., Alarcon-Ortiz, A., Peralvo, A. E., Romero, R. J., & Garcia, M. V. (2021). Sistema de realidad aumentada para la enseñanza de matemática en tiempos de COVID-19. *Revista Ibérica de Sistemas e Tecnologias de Informação*, (E42), 530-541.

Opu, M. I., Islam, M. R., Kabir, M. A., Hossain, M. S., & Islam, M. M. (2021). Learn2write: augmented reality and machine learning-based mobile app to learn writing. *Computers, 11*(1), 4. https://doi.org/10.3390/computers11010004

Ortiz-Mendoza, G. J., & Guevara-Vizcaíno, C. F. (2021). Gamificación en la enseñanza de matemáticas. *Episteme Koinonia, 4*(8), 164. https://doi.org/10.35381/e.k.v4i8.1351

Osorio, E. A., Galindo, D. M., & Serrano, S. Aplicación móvil de realidad aumentada para el aprendizaje de las aplicaciones de las integrales múltiples. *Manuel Prieto, Silvia Pech y Joel Angulo, 6*.

Puchades, J. M., & Sáez, M. L. (2016). *LegoMath. Realidad aumentada en el aula de matemáticas. In Tecnología, innovación e investigación en los procesos de enseñanza-aprendizaje.* Octaedro. http://hdl.handle.net/10045/61787

Pumacallahui, S. E. (2014). *El uso de los softwares educativos como estrategia de enseñanza y el aprendizaje de la geometría en los estudiantes de cuarto grado del nivel secundario en las instituciones educativas de la provincia de Tambopata-región de Madre de Dios -2012.* [Tesis de Doctorado, Universidad Nacional de Educación Enrique Guzmán y Valle, Perú].

Pedraza-Gutiérrez, S. I., Romero-González, J. F., Güiza-Rodríguez, J. C., & Giraldo-Henao, E. W. (2023). Diseño centrado en el usuario y experiencia de usuario en el sistema de control de acceso de la universidad libre. *Revista Científica De Sistemas E Informática, 3*(1), e426. https://doi.org/10.51252/rcsi.v3i1.426

Reinoso, R. (2012). *Posibilidades de la realidad aumentada en educación.* Editorial espiral.

Rojas, D., Velásquez, C., & Dillon, F. X. (2023). Contraste entre las teorías de aprendizaje aplicadas en el aula actual: Una mirada hacia la hibridación de sus características específicas. *Wimb Lu*, *18*(2), 119–142. https://doi.org/10.15517/wl.v18i2.58721

Reyes, E. R., & Anastacio, R. E. (2021). Las aplicaciones como medio de contacto entre el usuario y las organizaciones. *E-Idea Journal of Engineering Science, 3*(6), 46-57. https://doi.org/10.53734/esci.vol3.id179

Ricra, J. M. (2019). *El aprendizaje cooperativo y la competencia razonamiento cuantitativo en estudiantes de matemática del primer ciclo de una universidad privada.* [Tesis de Doctorado, Universidad San Martín de Porres]. https://hdl.handle.net/20.500.12727/4654

Sánchez, S. P., Guerrero, A. J., López-Núñez, J. J., & Belmonte, J. L. (2022). Flipped learning como alternativa pedagógica para el trabajo de la expresión musical en tiempos de pandemia (flipped learning as a pedagogical alternative for the work of musical expression in times of pandemic). *Retos, 47*, 384-393. https://doi.org/10.47197/retos.v47.95637

Shulman, L. S. (1987). *Knowledge and Teaching: Foundations of the New Reform*. Harvard Educational Review, 57(1), 1-22.

Simba, A. R., Vásquez, M. D., Simba, S. E., Ramírez, F. E., Gomezcoello, B. G., & Herrera, M. E. (2023). Investigación educativa durante la pandemia: reflexiones para la construcción de nuevos paradigmas pedagógicos. *MENTOR Revista De Investigación Educativa Y Deportiva, 2*(5), 188-204. https://doi.org/10.56200/mried.v2i5.5875

Soto, R. (2017). *Realidad aumentada y secuencias didácticas como elementos de mejora en la educación matemática y la formación permanente del profesorado.* [Tesis de Doctorado, Universidad Autónoma de Madrid]. https://repositorio.uam.es/handle/10486/680152

Soto Moreno, A. M. (2024). *Methodological strategies to reinforce the teaching of mathematics in the baccalaureate in science at the Isabel de Godin educational unit. Revista Tecnológica Ciencia Y Educación Edwards Deming, 8(1*). https://doi.org/10.37957/rfd.v8i1.124

Stewart, J. (2015). *Cálculo.* (Vol. 1;2). Cengage Learning.

Tiengyoo, K., Sotaro, S., & Thaithae, S. (2024). *Levels of factors influencing the 21st-century mathematics teaching challenges for secondary students in the secondary educational service area office of lopburi: a structural equation modeling approach. Problems of Education in the 21st Century, 82(3), 410-423*. https://doi.org/10.33225/pec/24.82.410

Vilca, R. (2019). *Aplicación del software Geogebra y su influencia en el aprendizaje de áreas y volúmenes de sólidos de revolución en el cálculo integral en los* *estudiantes del primer año de la Facultad de Ingenierías de la Universidad Continental Arequipa-2017.* [Tesis de Maestría, Universidad Nacional de San Agustín]. http://repositorio.unsa.edu.pe/handle/UNSA/8427

Widana, I. W. ,& Laksitasari, B. D. (2023). Improving students learning outcomes on circle equation material using GeoGebra software. *Indonesian Journal of Educational Development (IJED), 4*(1), 32-39. https://doi.org/10.59672/ijed.v4i1.2792

Zamata, F. R., Jaramillo, D. I. S., Reyes, L., & Rivera, A. S. M. (2020). Estrategias didácticas, desarrollo del pensamiento crítico y su incidencia en el aprendizaje significativo. *CIID Journal, 1*(1), 432-444. https://doi.org/10.46785/ciidj.v1i1.83

ANEXOS

Anexo 1: Matriz de Consistencia

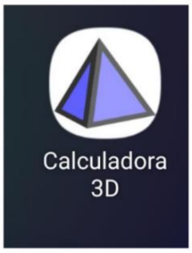
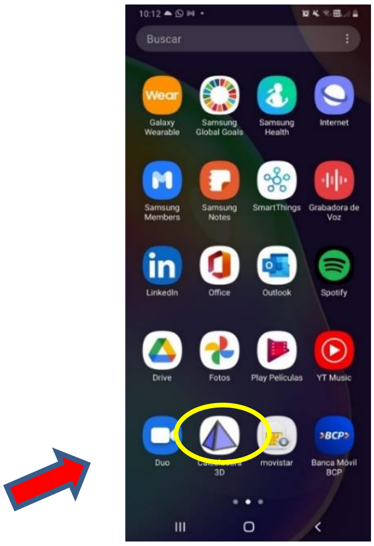
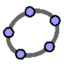
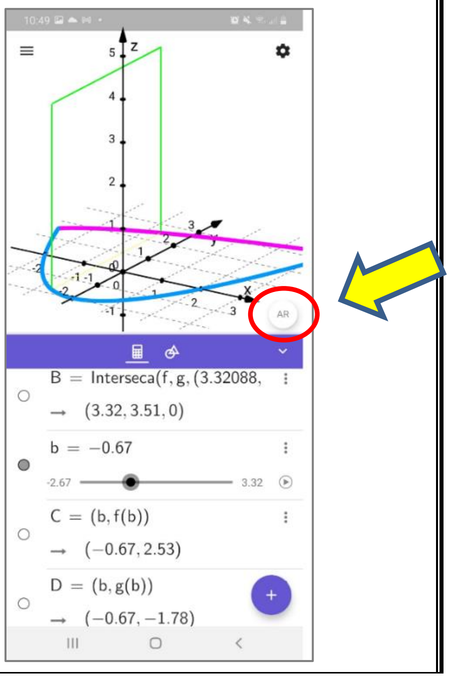
PROBLEMAS	OBJETIVOS	HIPÓTESIS	VARIABLES	DIMENSIONES	INDICADORES	Instrumentos	ÍTEMS
Principal	**Principal**	**Principal**					
¿En qué medida la propuesta didáctica basada en el uso de la RA influye significativamente en el nivel del aprendizaje de las aplicaciones de la integral definida en estudiantes de la carrera de Arquitectura de la Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas?	Evaluar la influencia de la propuesta didáctica basada en el uso de la RA en el nivel de aprendizaje de las aplicaciones de la integral definida en estudiantes de la carrera de Arquitectura de la Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas.	La aplicación de la propuesta didáctica basada en el uso de la RA como herramienta de apoyo, influye significativamente en el nivel de aprendizaje de las aplicaciones de la integral definida, en estudiantes de la carrera de Arquitectura de la Universidad Peruanade Ciencias Aplicadas.	**VI: Uso de la RA como herramienta interactiva en la enseñanza de las aplicaciones de la integral definida.**		-Aplicación de la propuesta didáctica en la Unidad 1: Volumen de sólidos por secciones planas -Aplicación de la propuesta didáctica en la Unidad 2: Volumen de sólidos de revolución. Método de arandela. -Aplicación de la propuesta didáctica en la Unidad 3: Volumen de sólidos de revolución. Método de arandela y disco.	Propuesta didáctica	Sesión 1 Sesión 2 Sesión 3
Específicos	**Específicos**	**Derivadas**					
1. ¿En qué medida la propuesta didáctica basada en el uso de la RA influye significativamente en el desarrollo de la capacidad de interpretar la información basada en diferentes formatos para el aprendizaje de las aplicaciones de la integral definida, en estudiantes de la carrera de Arquitectura de la Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas?	1. Evaluar la influencia de la propuesta didáctica basada en el uso de la RA en el desarrollo de la capacidad de interpretar la información basada en diferentes formatos para el aprendizaje de las aplicaciones de la integral definida en estudiantes de la carrera de Arquitectura de la Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas.	1. La aplicación de la propuesta didáctica basada en el uso de la RA influye significativamente en el desarrollo de la capacidad de interpretar la información basada en diferentes formatos para el aprendizaje de las aplicaciones de la integral definida, en estudiantes de la carrera de Arquitectura de la Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas.	**VD: Nivel de aprendizaje de las aplicaciones de la integral definida en estudiantes de la carrera de Arquitectura de la**	Interpretación	- Nivel de desarrollo de la capacidad de interpretar la información basada en diferentes formatos.	Prueba de entrada Prueba de salida	1, 2, 3 y 4
2. ¿En qué medida la propuesta didáctica basada en el uso de la RA influye significativamente en el desarrollo de la capacidad de representar matemáticamente situaciones a partir de la información brindada para el aprendizaje de las aplicaciones de la integral definida, en estudiantes de la carrera de Arquitectura de la Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas?	2. Evaluar la influencia de la propuesta didáctica basada en el uso de la RA en el desarrollo de la capacidad de representar matemáticamente situaciones a partir de la información brindada para el de aprendizaje de las aplicaciones de la integral definida en estudiantes de la carrera de Arquitectura de la Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas.	2. La aplicación de la propuesta didáctica basada en el uso de la RA influye significativamente en el desarrollo de la capacidad representar matemáticamente situaciones a partir de la información brindada para el aprendizaje de las aplicaciones de la integral definida, en estudiantes de la carrera de Arquitectura de la Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas.		Representación	-Nivel de desarrollo de la capacidad de representar matemáticamente situaciones a partir de la información brindada.		5, 6 y 7

PROBLEMAS	OBJETIVOS	HIPÓTESIS	VARIABLES	DIMENSIONES	INDICADORES	Instrumentos	ÍTEMS
Específicos	**Específicos**	**Derivadas**					
3. ¿En qué medida la propuesta didáctica basada en el uso de la RA influye significativamente en el desarrollo de la capacidad de efectuar operaciones matemáticas mediante algoritmos para el aprendizaje de las aplicaciones de la integral definida, en estudiantes de la carrera de Arquitectura de la Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas?	3. Evaluar la influencia de la propuesta didáctica basada en el uso de la RA en el desarrollo de la capacidad de efectuar operaciones matemáticas mediante algoritmos para el aprendizaje de las aplicaciones de la integral definida en estudiantes de la carrera de Arquitectura de la Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas.	3. La aplicación de la propuesta didáctica basada en el uso de la RA influye significativamente en el desarrollo de la capacidad de efectuar operaciones matemáticas mediante algoritmos para el aprendizaje de las aplicaciones de la integral definida, en estudiantes de la carrera de Arquitectura de la Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas.	**VD: Nivel de aprendizaje de las aplicaciones de la integral definida en estudiantes de la carrera de Arquitectura de la**	Cálculo	- Nivel de desarrollo de la capacidad de efectuar operaciones matemáticas mediante algoritmos.	Prueba de entrada Prueba de salida	8, 9 y 10
4. ¿En qué medida la propuesta didáctica basada en el uso de la RA influye significativamente en el desarrollo de la capacidad de analizar los resultados obtenidos de la aplicación de métodos matemáticos para el aprendizaje de las aplicaciones de la integral definida, en estudiantes de la carrera de Arquitectura de la Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas?	4. Evaluar la influencia de la propuesta didáctica basada en el uso de la RA en el desarrollo de la capacidad de analizar los resultados obtenidos de la aplicación de métodos matemáticos para el de aprendizaje de las aplicaciones de la integral definida en estudiantes de la carrera de Arquitectura de la Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas.	4. La aplicación de la propuesta didáctica basada en el uso de la RA influye significativamente en el desarrollo de la capacidad de analizar los resultados obtenidos de la aplicación de métodos matemáticos para el aprendizaje de las aplicaciones de la integral definida, en estudiantes de la carrera de Arquitectura de la Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas.		Análisis	-Nivel de desarrollo de la capacidad de analizar los resultados obtenidos de la aplicación de métodos matemáticos.		11
5. ¿En qué medida la propuesta didáctica basada en el uso de la RA influye significativamente en el desarrollo de la capacidad de explicar las conclusiones de su razonamiento para el aprendizaje de las aplicaciones de la integral definida, en estudiantes de la carrera de Arquitectura de la Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas?	5. Evaluar la influencia de la propuesta didáctica basada en el uso de la RA en el desarrollo de la capacidad de explicar las conclusiones de su razonamiento para el aprendizaje de las aplicaciones de la integral definida en estudiantes de la carrera de Arquitectura de la Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas.	5. La aplicación de la propuesta didáctica basada en el uso de la RA influye significativamente en el desarrollo de la capacidad de explicar las conclusiones de su razonamiento para el aprendizaje de las aplicaciones de la integral definida, en estudiantes de la carrera de Arquitectura de la Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas.		Argumentación	- Nivel de desarrollo de la capacidad de explicar las conclusiones de su razonamiento.		12

Anexo 2: Propuesta didáctica y Prueba de Entrada y Salida

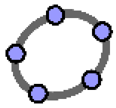
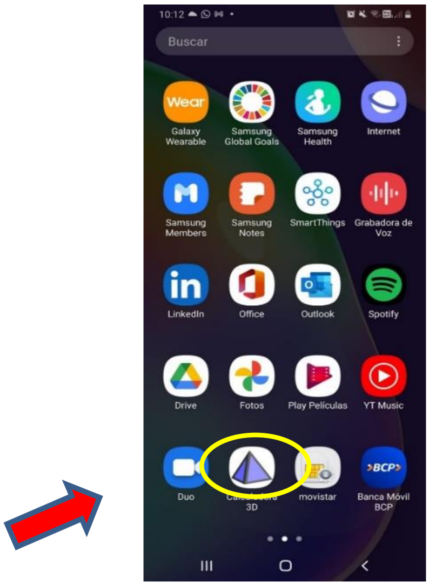
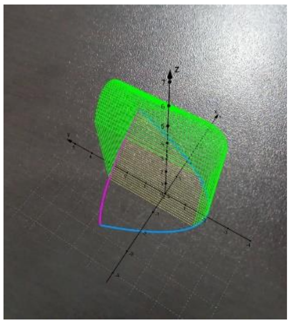
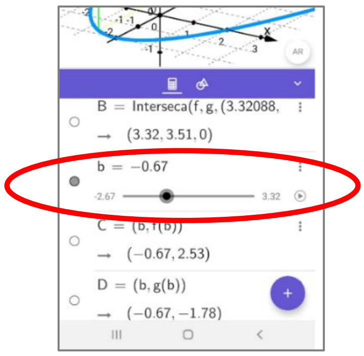
INSTRUCTIVO

Lea atentamente cada una de las indicaciones

1. Ir a la tienda de Play Store o App Store y descargar el aplicativo de GeoGebra 3D.	
2. Después de descargar el aplicativo de GeoGebra 3D verificar la instalación en la pantalla de su celular	
3. Ir a la tienda de Play Store o App Store y descargar la aplicación AR CORE de Google.	
4. Ingresar al aplicativo en GeoGebra 3D en el celular, dar clic en la  imagen Verificar que en la parte media de la pantalla del celular aparezca la palabra AR	

MANUAL AUTOINSTRUCTIVO

Para visualizar un sólido en realidad aumentada, seguir las siguientes indicaciones:

1. Dar clic en la siguiente imagen	
2. Ingresar al aplicativo en GeoGebra 3D en el celular	
3. Para activar la realidad aumentada dar clic en AR. Dirigir la cámara del celular a una superficie plana, aparecerá una malla de color blanco.	
4. Tocar la pantalla del celular aparecerá el sólido.	
5. Para darle movimiento al sólido dar clic en el deslizador "b"	

Módulo:

Aplicaciones de la Integral

Definida

ESTRUCTURA

- **Manual de instrucción**
- **Unidad I: Volumen de Sólidos por Secciones Planas**
  - Protocolo de la primera sesión de aprendizaje
  - Volumen de sólidos por secciones planas

    Definición

    Ejemplos - Actividad (Uso de la RA)
- **Unidad II: Volumen de Sólidos de Revolución**
  - Protocolo de la segunda sesión de aprendizaje
  - Volumen de sólidos por el Método de Arandela

    Definición

    Ejemplos - Actividad (Uso de la RA)
  - Protocolo de la tercera sesión de aprendizaje
  - Volumen de sólidos por el Método de Arandela y Método del Disco

    Definición

    Ejemplos - Actividad (Uso de la RA)
- **Evaluación**

UNIDAD I:

VOLUMEN DE SÓLIDOS POR SECCIONES PLANAS

Nota. https://images.app.goo.gl/oHrJHLx5twfTZ2Aq6

PROTOCOLO DE LA PRIMERA SESIÓN DE APRENDIZAJE

I. DATOS INFORMATIVOS

1.1. ÁREA : Ciencia
1.2. CARRERA : Arquitectura
1.3. DURACIÓN : 170 minutos
1.4. DOCENTE : Marlenny Rojas Barrios

II. TÍTULO DE LA SESIÓN	"Volúmenes por secciones planas"

II. Aprendizajes esperados

Competencia	Capacidades	Indicadores de desempeño
Determina el volumen de sólidos, emplea las secciones planas paralelas y resuelve situaciones de contexto real.	-Interpretar la información basada en diferentes formatos -Representar matemáticamente situaciones a partir de la información brindada -Efectuar operaciones matemáticas mediante algoritmos -Analizar los resultados obtenidos de la aplicación de métodos matemáticos -Explicar las conclusiones de su razonamiento	✍ Nivel de desarrollo de la capacidad de interpretar los sólidos dada la región limitada por dos funciones y las secciones transversales conocidas ✍ Nivel de desarrollo de la capacidad de representar matemáticamente el volumen de un sólido por secciones planas ✍ Nivel de desarrollo de la capacidad calcular el volumen de un sólido por secciones planas haciendo uso de las propiedades de integración o calculadora ✍ Nivel de desarrollo de la capacidad de analizar los resultados obtenidos haciendo uso de la aritmética ✍ Nivel de desarrollo de explicar la mejor decisión teniendo presente el criterio de selección

Momentos	Estrategias	Recursos	Tiempo
INICIO	-La profesora ingresa a la sala de videoconferencia y muestra el material de trabajo. -La profesora muestra el logro de la sesión -La profesora presenta el PPT donde se muestra la gráfica de un sólido y pregunta a los estudiantes de ¿qué manera se puede calcular el volumen de dicho sólido?	-Aula Virtual: Blackboard -PPT -Sala de Videoconferencia -Material de trabajo	10 min
DESARROLLO DE LA CLASE	-A partir de la lluvia de ideas, la profesora muestra el PPT donde se observa que el volumen del sólido se puede calcular partiendo el sólido en rebanadas o sólidos más pequeños. - Posteriormente, la profesora traza dos planos y los intersecta con el sólido. -La profesora pregunta a los estudiantes ¿de qué manera pueden calcular el volumen de la rebanada obtenida al intersectar los planos con el sólido? -El estudiante participa sobre la base de sus conocimientos previos: Volumen=A_{Base} x Altura -La profesora formaliza el volumen de la rebanada y la define como el diferencial de volumen. -Con la ayuda del PPT y del concepto de límite, la profesora deduce el volumen de un sólido cualquiera. -La profesora muestra la definición de volumen **<u>Capacidad:</u> Interpretar** -La profesora muestra el Ejemplo 0: a) y pregunta a los estudiantes: dada la base del sólido, ¿cuál de los gráficos mostrados corresponde a la sección transversal paralela al plano YZ, si se sabe qué es un cuadrado? -Para responder a la interrogante, la profesora da clic en la imagen de GeoGebra y proyecta el sólido en 3D con realidad aumentada y lo comparte con sus estudiantes.	- PPT -Laptop -Pizarra digital -Lápiz digital -Calculadora -Material de trabajo	20 min

	-A partir del sólido animado y empleando realidad aumentada el estudiante visualiza las secciones planas y marca la alternativa. -Posteriormente, el docente hace la retroalimentación. -La profesora muestra el Ejemplo 0: b) y pide a los estudiantes: dada la base del sólido, ¿cuál de los gráficos mostrados corresponde a la sección transversal paralela al plano YZ, si se sabe qué es un triángulo equilátero? -Después de un tiempo prudencial y apoyados del aplicativo del GeoGebra y la realidad aumentada los estudiantes brindan sus respuestas. -Posteriormente la profesora realiza la retroalimentación. **<u>Capacidad:</u> Interpretar – Representar – Calcular** -La profesora muestra el ejemplo 1a) explica a los estudiantes: dada la base del sólido limitada por dos funciones, cómo esbozar la sección plana paralela al plano YZ, luego plantear el volumen del sólido y calcularlo. Si se sabe qué, las secciones planas son cuadrados. -Para ello, la profesora utiliza el GeoGebra y proyecta el sólido en realidad aumentada y explica cómo se genera el mismo, a partir de las secciones planas. Llevando así a determinar de manera correcta la función área, para luego calcular el volumen. -La profesora muestra el ejemplo 1b) y pide a los estudiantes: dada la base del sólido limitada por dos funciones, esbozar la sección plana paralela al plano YZ, luego plantear el volumen del sólido y calcularlo. Si se sabe qué, las secciones planas son triángulos equiláteros. -Posteriormente, los estudiantes utilizan el GeoGebra para proyectar el sólido en realidad aumentada y observar cómo se comportan las secciones transversales y pasar a responder las preguntas.		30 min

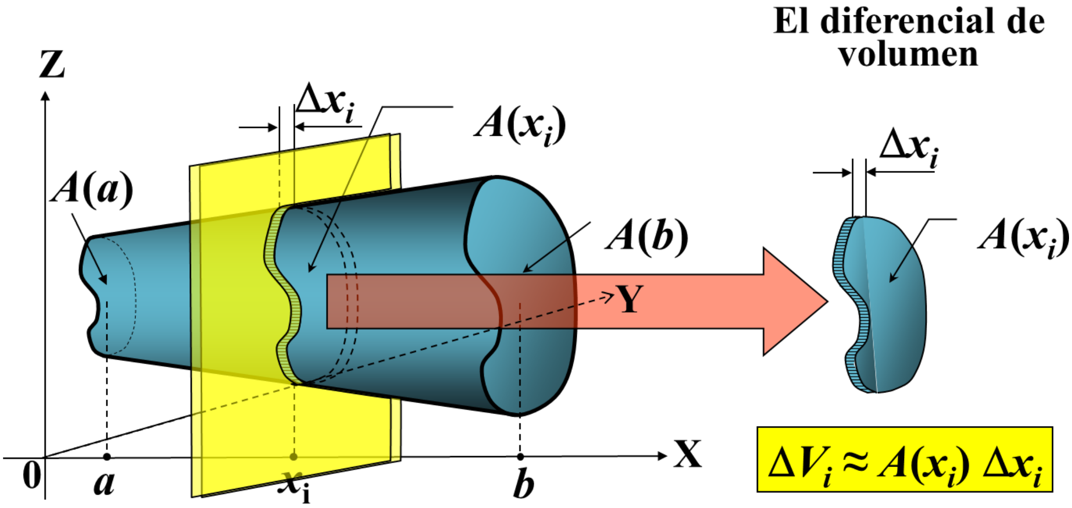
	-Luego, la profesora realiza la retroalimentación. -La profesora muestra el ejemplo 1c) y pide a los estudiantes: dada la base del sólido limitada por dos funciones, esbozar la sección plana paralela al plano YZ, luego plantear el volumen del sólido y calcularlo. Si se sabe qué, las secciones planas son triángulos equiláteros. -Posteriormente, los estudiantes utilizan el GeoGebra para proyectar el sólido en realidad aumentada y observar cómo se comportan las secciones transversales y pasar a responder las preguntas. -Luego, la profesora realiza la retroalimentación. -La profesora muestra el ejemplo 2 explica a los estudiantes: dada la base del sólido limitada por tres funciones, cómo esbozar las secciones planas paralelas al plano YZ, luego plantear los volúmenes de los sólidos y calcularlo. Si se sabe qué, las secciones planas son rectángulos. -Para ello, la profesora utiliza el GeoGebra y proyecta el sólido en realidad aumentada y explica cómo se genera el mismo, a partir de las secciones planas. Llevando así a determinar de manera correcta las funciones áreas, para luego calcular los volúmenes. -La profesora muestra el ejercicio 1 y pide a los estudiantes: dada la base del sólido limitada por dos funciones, esbozar la sección plana paralela al plano YZ, luego plantear el volumen del sólido y calcularlo. Si se sabe qué, las secciones planas son semicírculos. -Posteriormente, los estudiantes utilizan el GeoGebra para proyectar el sólido en realidad aumentada y observar cómo se comportan las secciones transversales y pasar a responder las preguntas. -La profesora muestra el ejercicio 2 y pide a los estudiantes: dada la base del sólido limitada por dos funciones, esbozar la sección plana paralela al plano YZ, luego plantear el volumen del sólido y		80 min

	calcularlo. Si se sabe qué, las secciones planas son rectángulos. -Posteriormente, los estudiantes utilizan el GeoGebra para proyectar el sólido en realidad aumentada y observar cómo se comportan las secciones transversales y pasan a responder las preguntas. **<u>Capacidad:</u> Analizar – Explicar** -La profesora muestra la situación de contexto real y apoyados del ejercicio 2 utilizan el valor del volumen para analizar, empleando conocimientos previos de aritmética para posteriormente explicar.		20 min
CIERRE	-La profesora muestra el último PPT y hace la retro alimentación de la situación de contexto real	-PPT -Laptop	10 min

SESIÓN 1: VOLUMEN DE SÓLIDOS POR SECCIONES PLANAS PARALELAS

Competencia: Al finalizar la sesión, el estudiante determina el volumen de sólidos, emplea las secciones planas paralelas y resuelve situaciones de contexto real.

Como sabemos, el volumen de un sólido se puede descomponer en una suma de volúmenes y, en nuestro caso, partiremos de un diferencial de volumen cuyas secciones planas son paralelas.



$$V \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i \quad \rightarrow \quad V \approx \sum_{i=1}^{n} A(x_i)\Delta x_i$$

Entonces, cuando $n \to +\infty$ en la suma anterior, el volumen V del sólido es:

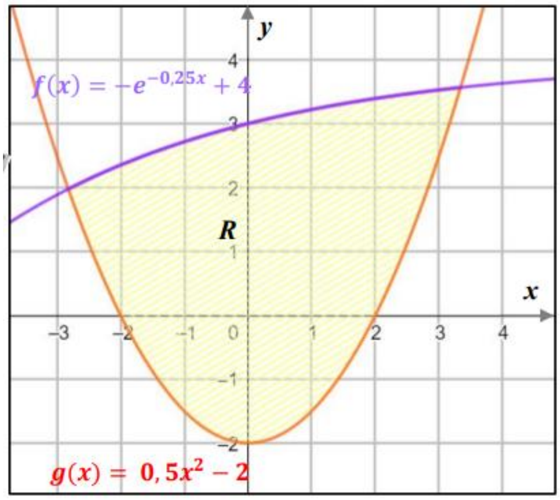
$$V = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} A(x_i)\Delta x_i$$

$$V = \int_a^b A(x)\,dx$$

VOLUMEN[1] DE SÓLIDOS POR SECCIONES PLANAS
El volumen de un sólido con un área transversal conocida e integrable $A(x)$ desde $x = a$ hasta $x = b$, es la integral de $A(x)$ desde a hasta b: $$V = \int_a^b A(x)\,dx$$

[1] CÁLCULO: una variable (Thomas & Finney 9a edición), página. 375.

Ejemplo 1:

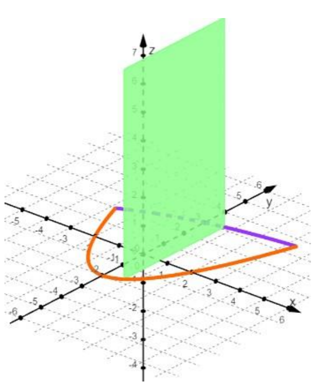
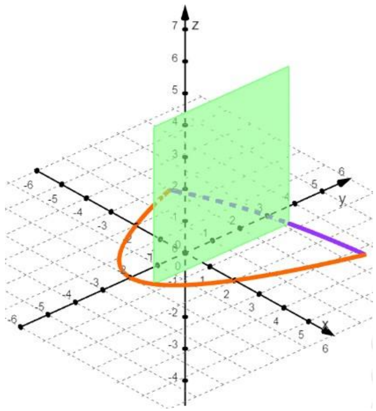
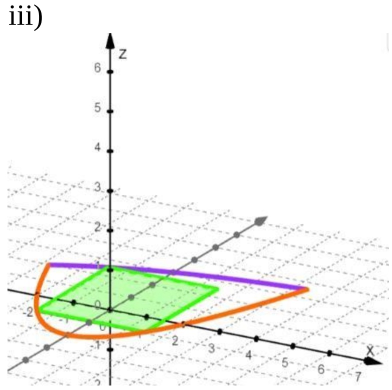


Sea $\boldsymbol{S}$ el sólido cuya base es la región $\boldsymbol{R}$, limitada por las gráficas de las funciones $\boldsymbol{f}$ y $\boldsymbol{g}$. Sus secciones transversales paralelas entre sí al plano YZ y perpendiculares a la base del sólido son:

a) Cuadrados

A partir del sólido $\boldsymbol{S}$ en 3D, identifique la gráfica de una sección plana al plano YZ:

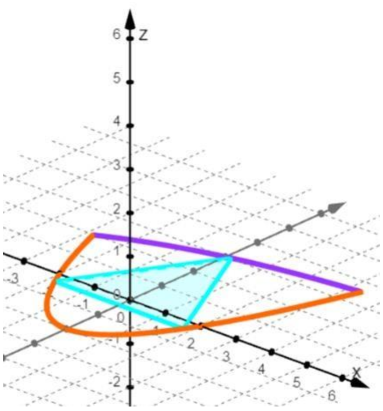
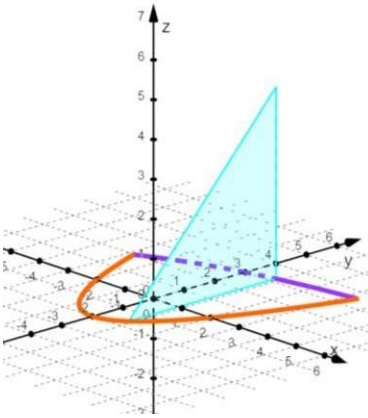
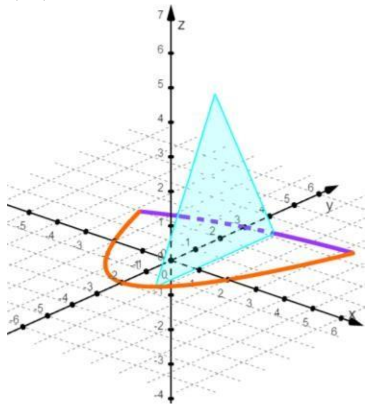
Nota: Para ver el sólido dar clic en la siguiente imagen**:**

(i)	(ii)	iii)
		

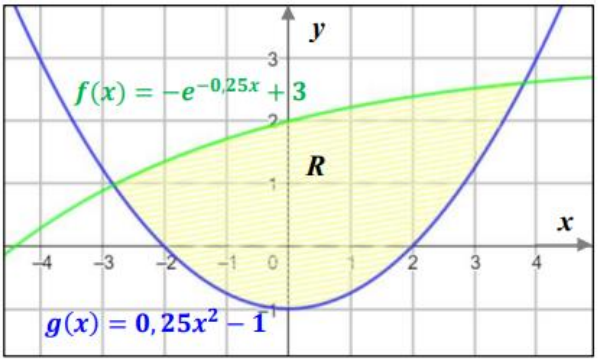
b) Triángulos equiláteros

A partir del sólido S en 3D, identifique la gráfica de una sección plana paralela al plano YZ:

Nota: Para ver el sólido dar clic en la siguiente imagen:

(i)	(ii)	(iii)
		

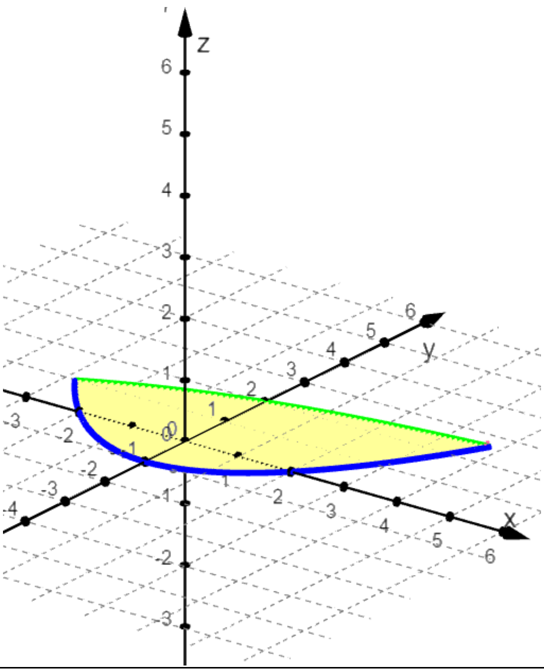
Ejemplo 2:

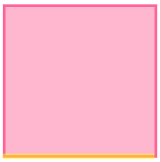


Sea $\boldsymbol{S}$ el sólido cuya base es la región $\boldsymbol{R}$, limitada por las gráficas de las funciones $\boldsymbol{f}$ y $\boldsymbol{g}$. Sus secciones transversales paralelas entre sí al plano YZ y perpendiculares a la base del sólido son:

a) Cuadrados

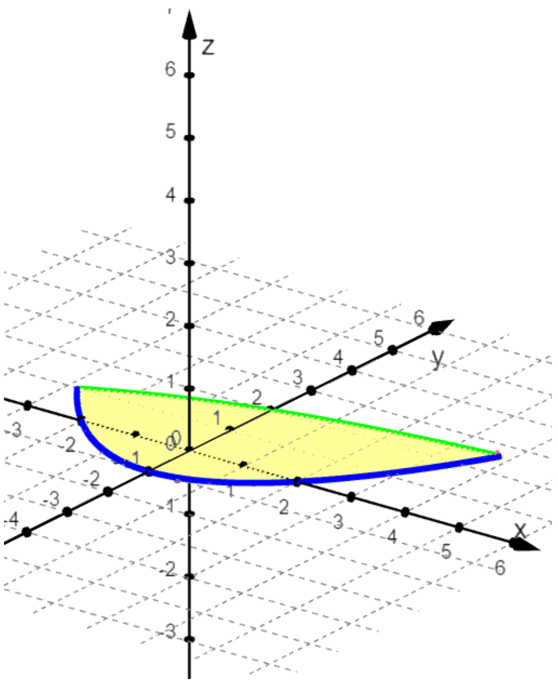
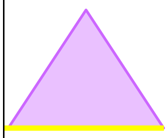
A partir del sólido S en 3D. Para ver el sólido dar clic en la siguiente imagen

<table>
<tr><th>Realice el esbozo de una sección plana paralela al plano YZ</th><th>Determine el volumen del sólido S.</th></tr>
<tr><td></td><td>Solución:
1) Hallamos los puntos de intersección entre las gráficas:
$f(x)=g(x)$

2) Determinamos la función área:
</td></tr>
<tr><td colspan="2">3) Determinamos el volumen pedido:
$$V = \int_a^b A(x)\,dx$$</td></tr>
</table>

b) Triángulos equiláteros:

A partir del sólido ***S*** en 3D. Para ver el sólido dar clic en la siguiente imagen

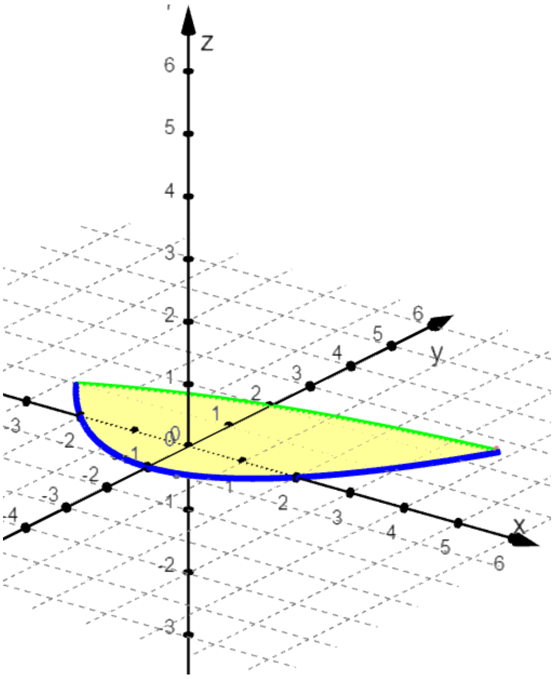
Realice el esbozo de una sección plana paralela al plano YZ	Determine el volumen del sólido ***S***.
	Solución: 1) Identificamos los puntos de intersección entre lasgráficas: 2) Determinamos la función área: 

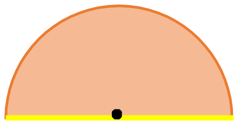
3) Determinamos el volumen pedido:

$$V = \int_a^b A(x)\, dx$$

c) Semicírculos:

A partir del sólido ***S*** en 3D (para ver el sólido dar clic en la siguiente imagen)

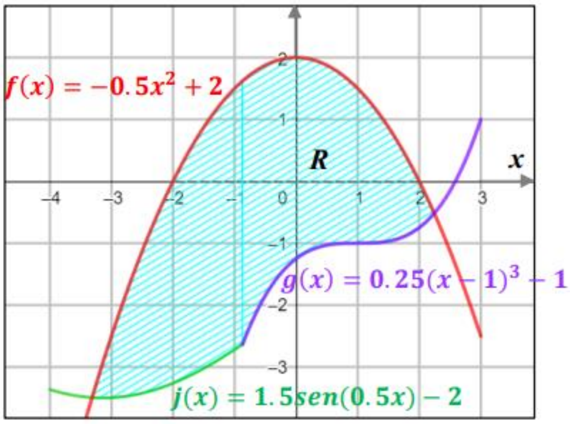
<table>
<tr><th>Realice el esbozo de una sección plana paralela al plano YZ</th><th>Determine el volumen del sólido S.</th></tr>
<tr><td>
</td><td>Solución:
1) Identificamos los puntos de intersección entre lasgráficas:

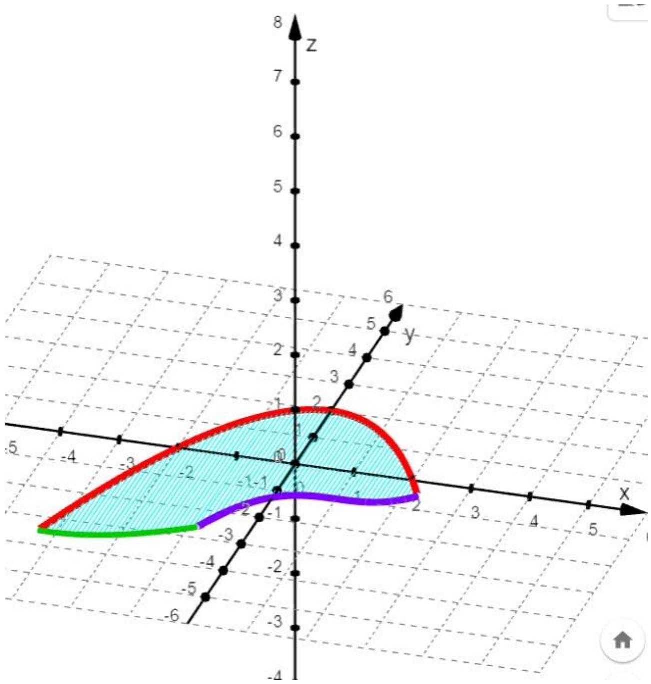
2) Determinamos la función área:
</td></tr>
<tr><td colspan="2">3) Determinamos el volumen pedido:

$$V = \int_a^b A(x)\, dx$$
</td></tr>
</table>

Ejemplo 3:

La figura muestra la base de un sólido cuya región R está limitada por las gráficas de las funciones f, g y j. Sus secciones transversales paralelas entre sí al plano YZ y perpendiculares a la base del sólido, son rectángulos cuya altura mide los dos tercios de su base. A partir del sólido S en 3D (para ver el sólido dar clic en la siguiente imagen), responda:

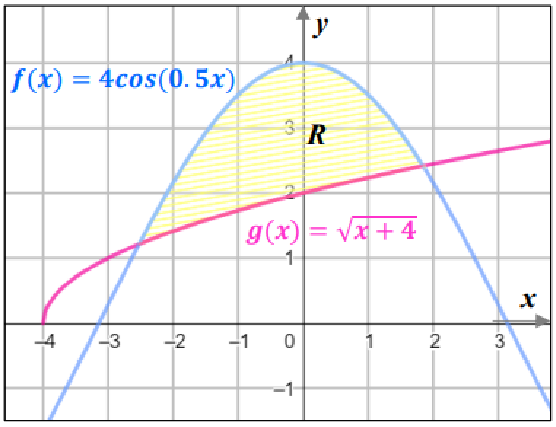


<table>
<tr><th>Realice el esbozo de una sección plana paralela al plano YZ</th><th>Determine el volumen del sólido S.</th></tr>
<tr><td>
</td><td>Solución:
1) Hallamos los puntos de intersección entre lasgráficas:

2) Determinamos la función área:</td></tr>
<tr><td colspan="2">3) Determinamos el volumen pedido
$$V = \int_a^b A(x)\,dx$$</td></tr>
</table>

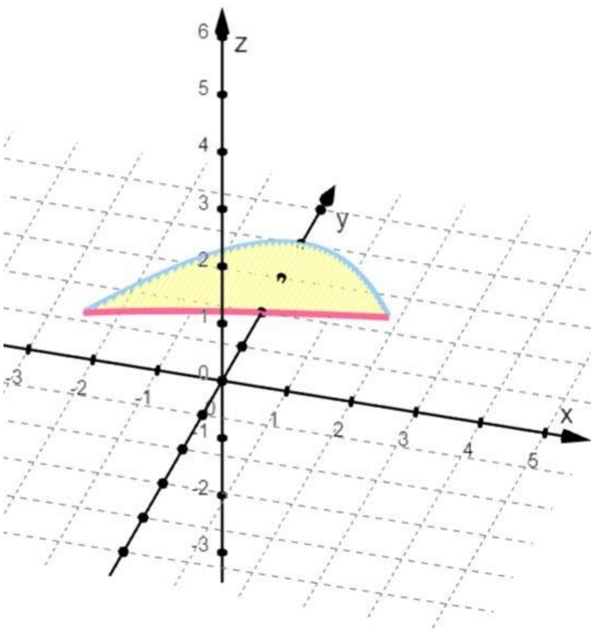
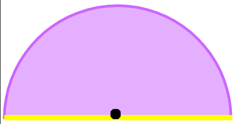
Ejercicio 1:

Sea ***S*** el sólido cuya base es la región ***R***, limitada por las gráficas de las funciones ***f*** y ***g***. Sus secciones transversales paralelas entre sí al plano YZ y perpendiculares a la base del sólido son:



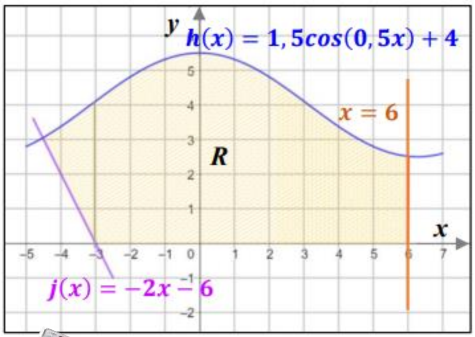
Semicírculos:

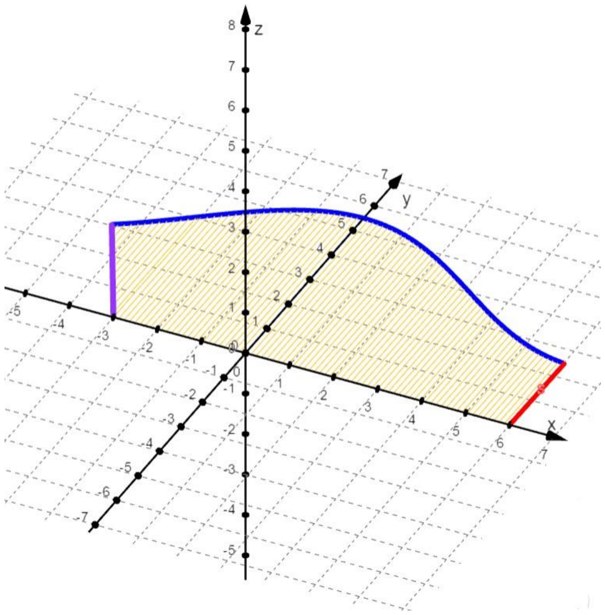
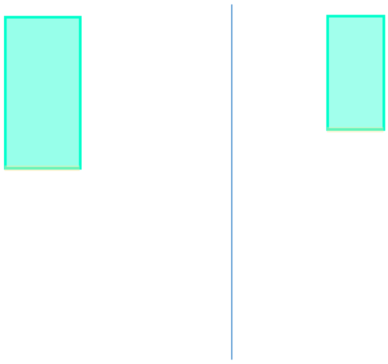
A partir del sólido ***S*** en 3D. Para ver el sólido dar clic en la siguiente imagen

Realice el esbozo de una sección plana paralela al plano YZ	Determine el volumen del sólido ***S***.
	Solución: 1) Identificamos los puntos de intersección entre lasgráficas: 2) Determinamos la función área: 
3) Determinamos el volumen pedido: $$V = \int_a^b A(x)\,dx$$	

Ejercicio 2:

La figura muestra la base de un sólido cuya región ***R*** está limitada por las gráficas de las funciones h, j y la recta $x = 6$ y el eje X. Sus secciones transversales paralelas entre sí al plano YZ y perpendiculares a la base del sólido, son rectángulos cuya altura mide el doble de su base. A partir del sólido ***S*** en 3D (para ver el sólido dar clic en la siguiente imagen), responda:



Realice el esbozo de una sección plana paralela al plano YZ	Determine el volumen del sólido ***S***.
	Solución: 1) Hallamos los puntos de intersección entre las gráficas: 2) Determinamos la función área: 

4) Determinamos el volumen pedido:

$$V = \int_a^b A(x)\,dx$$

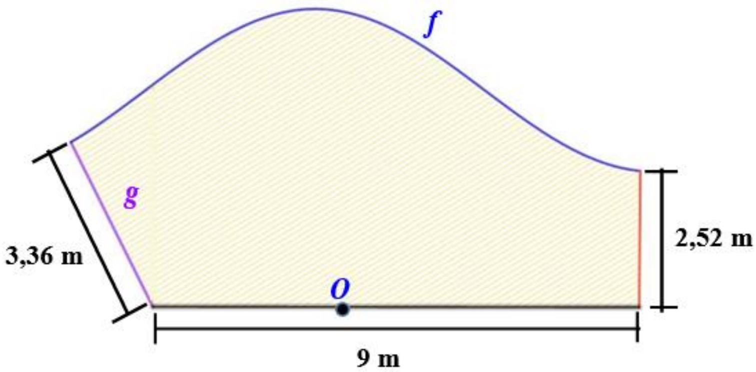
SITUACIÓN DE CONTEXTO REAL

Un purificador de aire es un dispositivo que eliminalos elementos contaminantes, convirtiendo cualquier espacio interior en un ambiente libre de partículas. Está diseñado para reducir la carga viralcomo el coronavirus y convertir cualquier espacio en un ambiente seguro.

Figura 1

Debido a la pandemia, Almendra dueña de cinco boutiques (todas de igual tamaño y diseño – ver figura 1), se ha visto en la necesidad de comprar una cierta cantidad de purificadores para mantener los espacios de la boutique debidamente ventilados.

Es por ello que, Almendra solicita al técnico Rafael un asesoramiento para la compra de los purificadores.Después de una amena conversación, Almendra informa que la estructura de la boutique está conformada por una base de 42,51 m^2, sobre la cual se levantan paredes de 3 m de altura (constante), y su techo descansa,considerando ***O*** como el origen de coordenadas, sobre la región limitada por las funciones ***f, g*** y el eje X (ver Figura 2). Además, el techo de la boutique es una superficie del sólido que se genera a partir de secciones planas paralelas entre sí, las cuales son rectángulos cuya altura mide la mitad de su base.



El técnico Rafael manifiesta que, para realizar la compra de los purificadores, es importante determinar elnúmero de cambios por hora, la cual se obtiene con la siguiente fórmula[2]:

$$Cambios\ de\ aire\ por\ hora = \frac{\text{tasa de ventilación de aire exterior}\frac{m^3}{min}\cdot\frac{60min}{h}}{Volumen(m^3)}$$

Además, los modelos de purificadores que reúnen los requisitos técnicos exigidos se muestran en la siguiente tabla:

[2] Tasa de ventilación de aire exterior es 30 m3/min

Modelo	Cambios de aire por hora	Precio por cada purificador (soles)	Tiempo de entrega	
			1-4 (purificadores)	5-10 (purificadores)
Reintdick easy[3]	3 - 6	704,50	5 días	8 días
Biozone[4]	1 - 3	625,50	5 días	10 días
Purificador Hepa[5]	4 - 6	1420,25	4 días	9 días

Considerando que el técnico Rafael cuenta con 8 000 soles y siendo su prioridad instalar los purificadores lo antes posible en cada boutique, para evitar la propagación de los virus; ¿será conveniente que el técnico Rafael compre purificadores Hepa para mantener los ambientes en condiciones óptimas

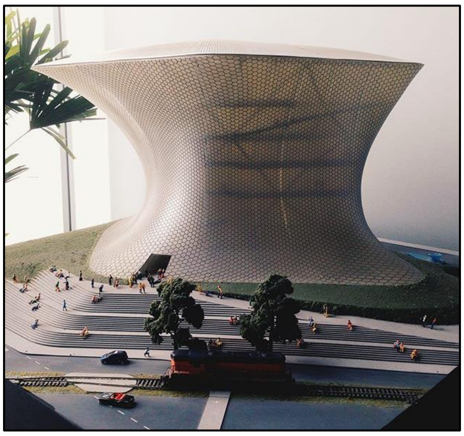
SOLUCIÓN		
ANÁLISIS:		
Área de la tienda = 42,51 m^2 Volumen total de la tienda = 42,51(3) + 379,45=506,98 m^3 $$Cambios\ de\ aire\ por\ hora = \frac{30\frac{m^3}{min}*60\frac{min}{h}}{506{,}98m^3} = 3.55 = 4\ cambios\ por\ hora$$		
Modelo: Reintdick easy	Modelo: Biozone	Modelo: Purificador Hepa
i) Como se requiere 4 cambios de aire por hora y este modelo brindade 3 a 6 cambios de aire por hora,es una opción probable de elegir. ii) Como el área de la tienda es de 42,51 m^2 y el modelo cubre un área de 25 m^2, eso significa que senecesita dos purificadores por tienda, y como son 5 locales, se necesitará comprar 10 purificadores en total. iii) Costo = 704,5(10) =7045 soles Demorarán 8 días en recibir los10 purificadores.	Como se requiere 4 cambios de aire por hora y este modelo brinda de 1 a 3 cambios de airepor hora, **<u>NO</u>** es una opción deelegir. Descartado	i) Como se requiere 4 cambios de airepor hora y este modelo brinda de 4 a 6 cambios de aire por hora, es unaopción probable de elegir. ii) Como el área de la tienda es de 42.51 m^2 y el modelo cubre un área de 50 m^2, eso significa que se necesita un purificador por tienda, ycomo son 5 locales, se necesitará comprar 5 purificadores en total. iii) Costo = 1420.25 (5)=7101.25 solesDemorarán 9 días en recibir los 5 purificadores.

[3] El purificador limpia el aíre de un área de hasta 25 m^2
[4] El purificador limpia el aíre de un área de hasta 15 m^2
[5] El purificador limpia el aíre de un área de hasta 50 m2

ARGUMENTACIÓN
No será conveniente que el técnico Rafael compre purificadores Hepa, porque si bien ambos modelos están dentro del presupuesto, él puede adquirir cualquiera de ellos, además, la adquisición del producto debe llegar lo antes posible. En ese sentido, la marca más conveniente es Reintdick easy, porque el valor de compra es de 7045 soles adquiriendo el pedido a los 8 días.

UNIDAD II:

VOLUMEN DE SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN



Nota. https://images.app.goo.gl/DB4X8Fgg1VAstcL77

PROTOCOLO DE LA SEGUNDA SESIÓN DE APRENDIZAJE

I. DATOS INFORMATIVOS

1.1. ÁREA	: Ciencia
1.2. CARRERA	: Arquitectura
1.3. DURACIÓN	: 170 minutos
1.4. DOCENTE	: Marlenny Rojas Barrios

II. TÍTULO DE LA SESIÓN	“Volúmenes de sólidos de revolución por el Método de Arandela”

III. Aprendizajes esperados

Competencia	Capacidades	Indicadores de desempeño
Determina el volumen de sólidos de revolución, emplea el método de arandela y reconoce el eje de giro.	-Interpretar la información basada en diferentes formatos -Representar matemáticamente situaciones a partir de la información brindada -Efectuar operaciones matemáticas mediante algoritmos -Analizar los resultados obtenidos de la aplicación de métodos matemáticos -Explicar las conclusiones de su razonamiento	✍ Nivel de desarrollo de la capacidad de interpretar los sólidos dada la región limitada por dos funciones que giran alrededor del eje X. ✍ Nivel de desarrollo de la capacidad de representar matemáticamente el volumen de un sólido de revolución empleando el Método de Arandela ✍ Nivel de desarrollo de la capacidad de calcular el volumen de un sólido de revolución haciendo uso de las propiedades de integración o calculadora ✍ Nivel de desarrollo de la capacidad de analizar los resultados obtenidos haciendo uso de la aritmética ✍ Nivel de desarrollo de explicar la mejor decisión teniendo presente el criterio de selección

Momentos	Estrategias	Recursos	Tiempo
INICIO	-La profesora ingresa a la sala de videoconferencia y muestra el material de trabajo. -La profesora muestra el logro de la sesión -La profesora presenta el PPT donde se muestra la gráfica de un sólido y pregunta a los estudiantes de ¿qué manera se puede calcular el volumen de dicho sólido?	-Aula Virtual: Blackboard -PPT -Sala de Videoconferencia -Material de trabajo	10 min
DESARROLLO DE LA CLASE	-A partir de la lluvia de ideas, la profesora muestra el PPT donde se observa que el volumen del sólido se puede calcular partiendo el sólido en rebanadas o sólidos más pequeños. - Posteriormente, la profesora traza dos planos y los intersecta con el sólido. -La profesora pregunta a los estudiantes ¿de qué manera pueden calcular el volumen de la rebanada obtenida al intersectar los planos con el sólido? -El estudiante participa sobre la base de sus conocimientos previos: Volumen de un sólido=A_{Base} x Altura -La profesora formaliza el volumen de la rebanada y la define como el diferencial de volumen. -Con la ayuda del PPT y del concepto de límite, la profesora deduce el volumen de un sólido hueco. -La profesora muestra la definición de volumen de un sólido hueco. **<u>Capacidad:</u> Interpretar** -La profesora muestra el Ejemplo 0: a) y pregunta a los estudiantes: dada la base del sólido, ¿cuál de los gráficos mostrados corresponde a la sección transversal paralela al plano YZ, si se sabe qué es un cuadrado? -Para responder a la interrogante, la profesora da clic en la imagen de GeoGebra y proyecta el sólido en 3D con realidad aumentada y lo comparte con sus estudiantes.	- PPT -Laptop -Pizarra digital -Lápiz digital -Calculadora -Material de trabajo	20 min

	-A partir del sólido animado y empleando realidad aumentada el estudiante visualiza las secciones planas y marca la alternativa. -Posteriormente, el docente hace la retroalimentación. -La profesora muestra el Ejemplo 0: b) y pide a los estudiantes: dada la base del sólido, ¿cuál de los gráficos mostrados corresponde a la sección transversal paralela al plano YZ, si se sabe qué es un triángulo equilátero? -Después de un tiempo prudencial y apoyados del aplicativo del GeoGebra y la realidad aumentada los estudiantes brindan sus respuestas. -Posteriormente la profesora realiza la retroalimentación. **<u>Capacidad:</u> Interpretar – Representar – Calcular** -La profesora muestra el ejemplo 1a) explica a los estudiantes: dada la base del sólido limitada por dos funciones, cómo esbozar la sección plana paralela al plano YZ, luego plantear el volumen del sólido y calcularlo. Si se sabe qué, las secciones planas son cuadrados. -Para ello, la profesora utiliza el GeoGebra y proyecta el sólido en realidad aumentada y explica cómo se genera el mismo, a partir de las secciones planas. Llevando así a determinar de manera correcta la función área, para luego calcular el volumen. -La profesora muestra el ejemplo 1b) y pide a los estudiantes: dada la base del sólido limitada por dos funciones, esbozar la sección plana paralela al plano YZ, luego plantear el volumen del sólido y calcularlo. Si se sabe qué, las secciones planas son triángulos equiláteros. -Posteriormente, los estudiantes utilizan el GeoGebra para proyectar el sólido en realidad aumentada y observar cómo se comportan las secciones transversales y pasar a responder las preguntas. -Luego, la profesora realiza la retroalimentación.		30 min

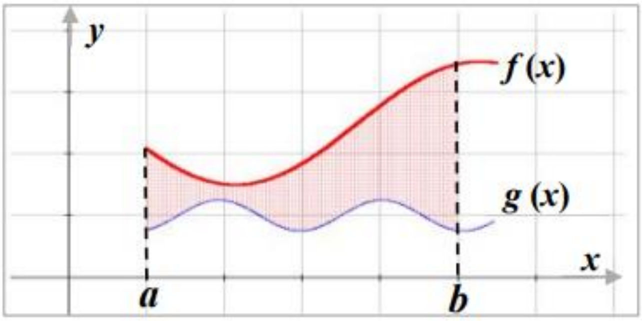
	-La profesora muestra el ejemplo 1c) y pide a los estudiantes: dada la base del sólido limitada por dos funciones, esbozar la sección plana paralela al plano YZ, luego plantear el volumen del sólido y calcularlo. Si se sabe qué, las secciones planas son triángulos equiláteros. -Posteriormente, los estudiantes utilizan el GeoGebra para proyectar el sólido en realidad aumentada y observar cómo se comportan las secciones transversales y pasar a responder las preguntas. -Luego, la profesora realiza la retroalimentación. -La profesora muestra el ejemplo 2 explica a los estudiantes: dada la base del sólido limitada por tres funciones, cómo esbozar las secciones planas paralelas al plano YZ, luego plantear los volúmenes de los sólidos y calcularlo. Si se sabe qué, las secciones planas son rectángulos. -Para ello, la profesora utiliza el GeoGebra y proyecta el sólido en realidad aumentada y explica cómo se genera el mismo, a partir de las secciones planas. Llevando así a determinar de manera correcta las funciones áreas, para luego calcular los volúmenes. -La profesora muestra el ejercicio 1 y pide a los estudiantes: dada la base del sólido limitada por dos funciones, esbozar la sección plana paralela al plano YZ, luego plantear el volumen del sólido y calcularlo. Si se sabe qué, las secciones planas son semicírculos. -Posteriormente, los estudiantes utilizan el GeoGebra para proyectar el sólido en realidad aumentada y observar cómo se comportan las secciones transversales y pasar a responder las preguntas. -La profesora muestra el ejercicio 2 y pide a los estudiantes: dada la base del sólido limitada por dos funciones, esbozar la sección plana paralela al plano YZ, luego plantear el volumen del sólido y calcularlo. Si se sabe qué, las secciones planas son rectángulos. -Posteriormente, los estudiantes utilizan el GeoGebra para proyectar el sólido en realidad aumentada y observar cómo se comportan las		80 min

	secciones transversales y pasan a responder las preguntas. **<u>Capacidad:</u> Analizar – Explicar** -La profesora muestra la situación de contexto real y apoyados del ejercicio 2 utilizan el valor del volumen para analizar, empleando conocimientos previos de aritmética para posteriormente explicar.		20 min
CIERRE	-La profesora muestra el último PPT y hace la retro alimentación de la situación de contexto real	-PPT -Laptop	10 min

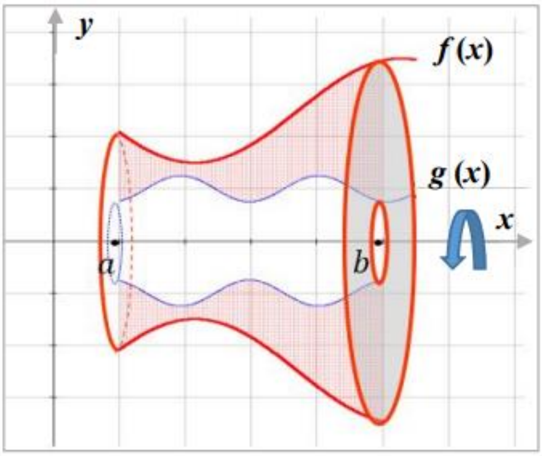
SESIÓN 2: VOLÚMENES DE SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN POR EL MÉTODO DE LA ARANDELA

Competencia: *Al finalizar la sesión, el estudiante determina el volumen de sólidos de revolución, emplea el método de arandela y reconoce el eje de giro.*

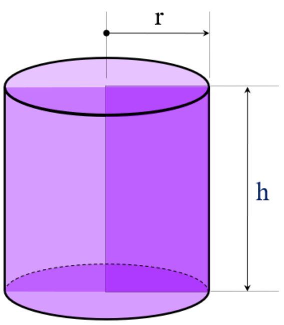
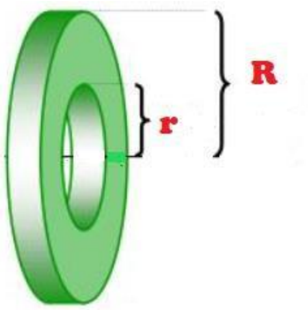
La región mostrada está limitada por dos funciones f y g ambas continuas en $[a;b]$ y las rectas verticales $x=a$, $x=b$



Al girar 360° la región mostrada, alrededor del eje X, se genera el siguiente sólido de revolución:

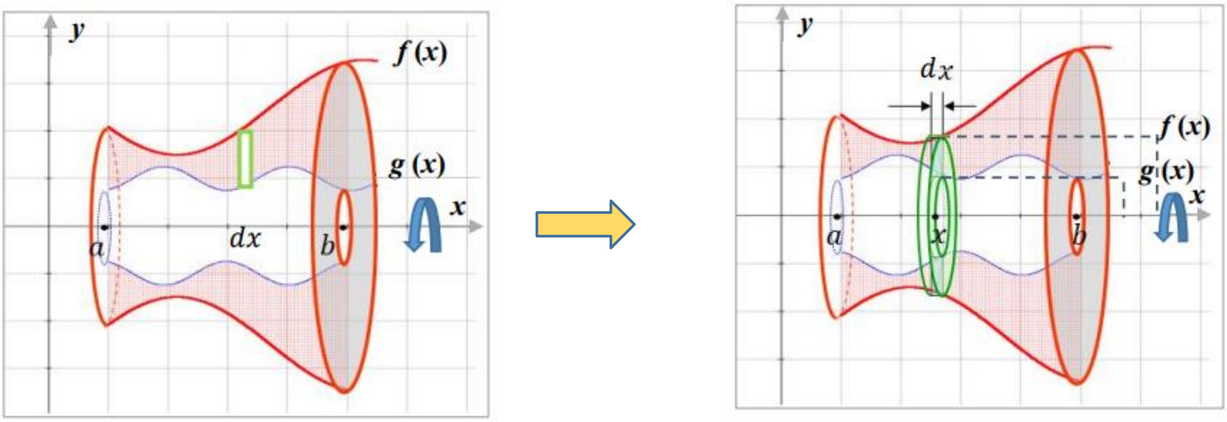


Recordemos:

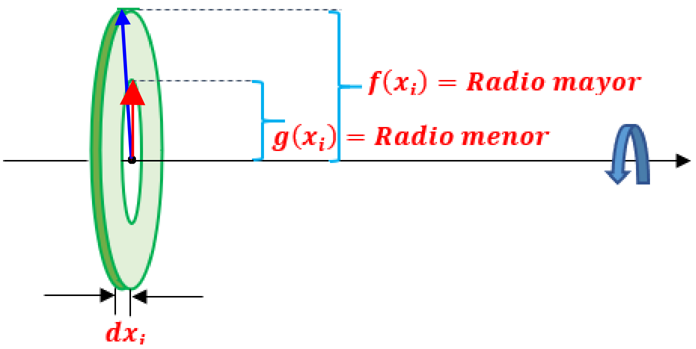
Volumen del cilindro	Volumen de cilindro hueco:
	
$V = \pi r^2 h$	$V = \pi \boldsymbol{R}^2 h - \pi \boldsymbol{r}^2 h$

VOLUMEN DE UN SÓLIDO DE REVOLUCIÓN:

Al considerar el diferencial de $\boldsymbol{x}$ **(**$\boldsymbol{dx}$**)** perpendicular al eje de giro X, la sección transversal del sólido de revolución es una arandela, tal que al considerar al diferencial de x **(**$\boldsymbol{dx}$**)** como la altura de la arandela (cilindro hueco), obtenemos:



Elemento diferencial:



Diferencial de volumen:

Para calcular el volumen de la arandela o cilindro hueco, empleamos: $V = \pi \boldsymbol{R}^2 h - \pi \boldsymbol{r}^2 h$

Reemplazando, tenemos: $\Delta V_i = \pi[f(x)]^2 dx_i - \pi[g(x)]^2\, dx_i$

$$\Delta V_i = \pi([f(x)]^2 - [g(x)]^2)\, dx_i$$

Formalizando:

Definición:

Sean f y g dos funciones continuas en $[a, b]$ tales que $f(x) \geq g(x) \geq 0$ para todo x en $[a, b]$. El volumen del sólido generado al rotar alrededor del eje X, la región limitada por $f(x)$, $g(x)$ y las rectas $x = a$ y $x = b$ será:

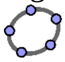
$$V = \pi \int_a^b [(Radio\ mayor)^2 - (Radio\ menor)^2]\, dx$$

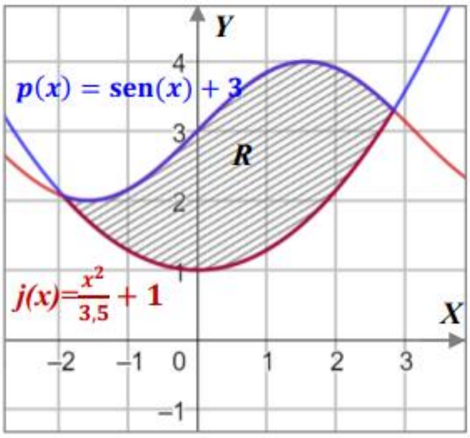
es decir,

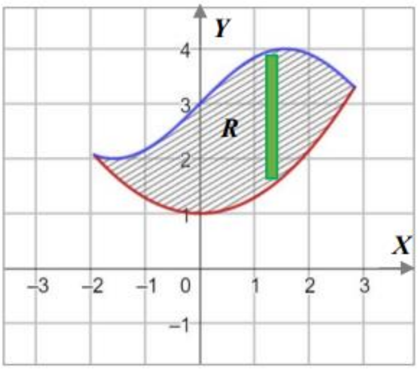
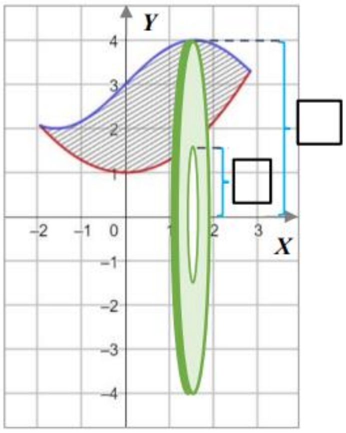
$$V = \pi \int_a^b [(f(x))^2 - (g(x))^2]\, dx$$

Ejemplo 1:

Sea ***R*** la región limitada por las funciones ***p*** y ***j***.

Al girar la región sombreada ***R***, alrededor del eje ***X***, se obtiene el sólido de revolución ***S***, cuya gráfica se visualiza al dar clic en la siguiente imagen 



1) Graficamos el diferencial de *x* (***dx***) en el dominio:	2) Al girar la región ***R*** alrededor del eje X, identificamos la arandela (cilindro hueco), en el dominio:
	

3) Determine el volumen del sólido ***S***

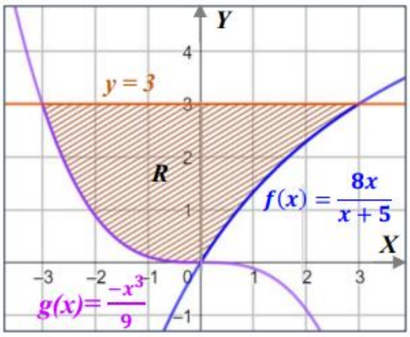
Determinamos el dominio de la función ***V***:

Identificamos el radio mayor: ***R* =**

Identificamos el radio menor: ***r*** =

Hallamos el volumen:

Ejemplo 2:

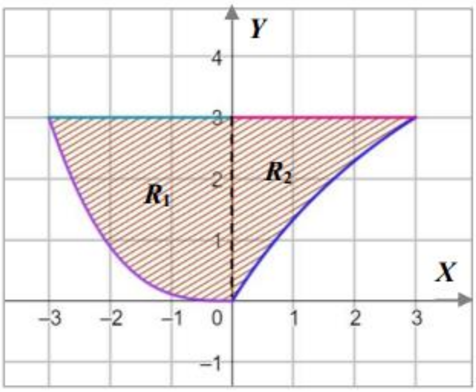


Sea ***R*** la región limitada por las funciones ***g***, ***f*** y la recta $y = 3$.

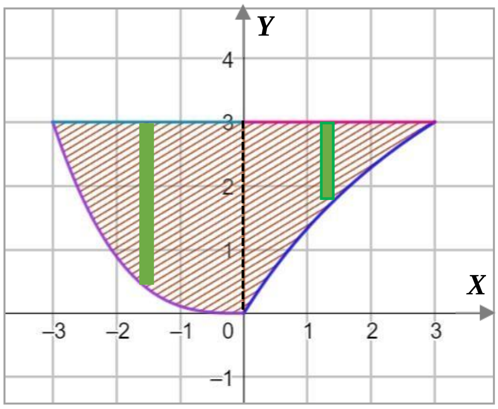
Al girar la región sombreada ***R***, alrededor del eje ***X***, se obtiene el sólido de revolución ***S***, cuya gráfica se visualiza al dar clic en la siguiente imagen

Complete los espacios en blanco

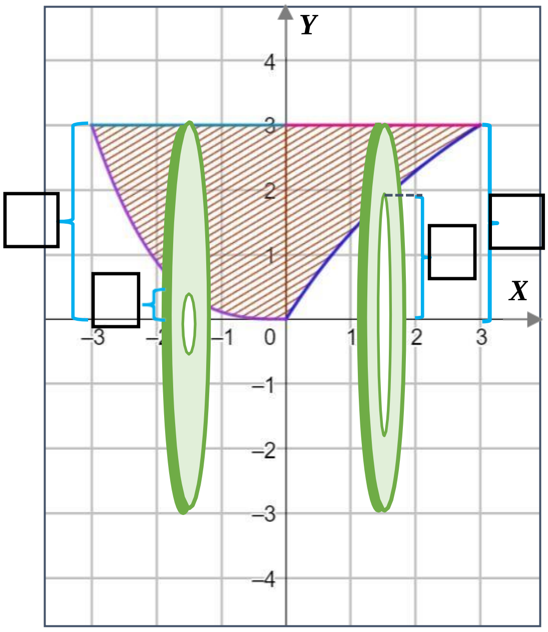
1) Como las funciones son diferentes en todo el dominio, es necesario dividir la región en .... partes:



2) Graficamos el diferencial de x (***dx***) en cada dominio:



3) Al girar las regiones R_1 y R_2 alrededor del eje X, identificamos dos arandelas (cilindros huecos), en cada dominio:



4) Determine el volumen del sólido ***S***:

Para la región R_1:

Identificamos el dominio de la función V_1:

Identificamos el radio mayor: $R=$
Identificamos el radio menor: $r =$
Hallamos el volumen 1:
$V_1=$

Para la región R_2:

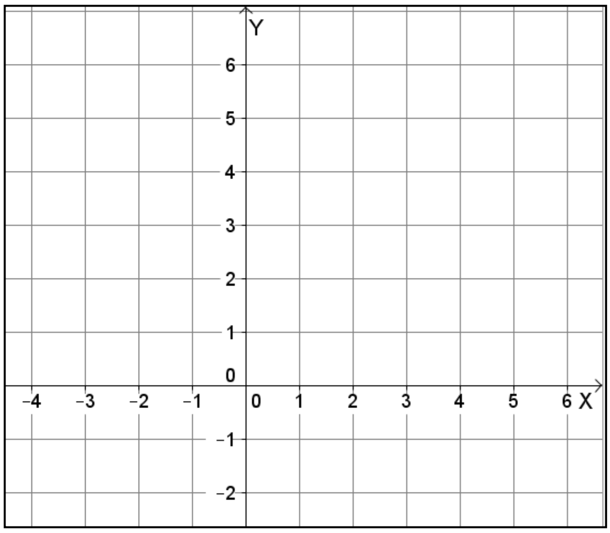
Identificamos el dominio de la función V_2:

Identificamos el radio mayor: $R=$
Identificamos el radio menor: $r =$
Hallamos el volumen 2:
$V_2 =$

Volumen total =

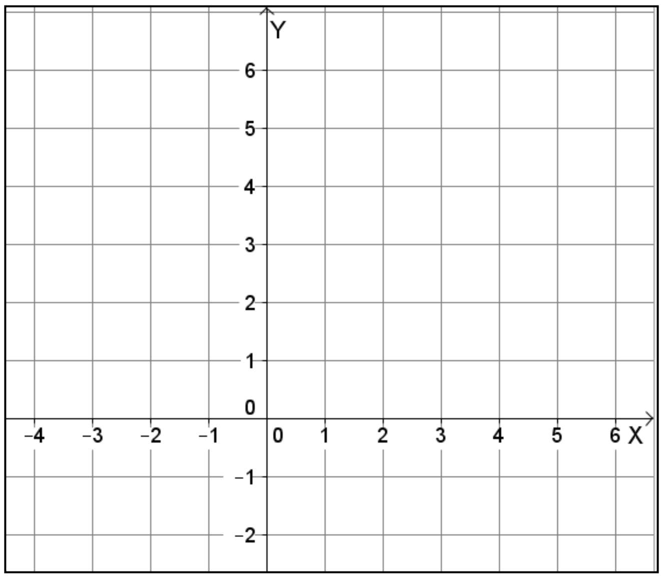
Ejemplo 3:

Sea ***R*** la región limitada por la gráfica de las funciones $f(x) = x^2$; $g(x) = \frac{x^3}{16}$ y $h(x) = 4$. Use GeoGebra para graficar la región ***R*** y determine los puntos de intersección entre cada gráfica que encierra la región. Luego sombree la región y determine el  volumen del sólido generado al girar la región sombreada ***R*** alrededor del eje X.

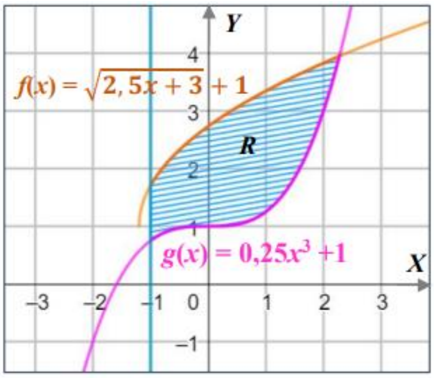


Ejercicio 1:

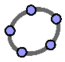
Sea ***R*** la región limitada por la gráfica de las funciones $f(x) = \sqrt{x+4}$; $g(x) = 0{,}25x^3 + 1$ y por la recta $x = -1$. Use GeoGebra para graficar la región ***R*** y determine los puntos de intersección entre cada gráfica que encierra la región. Luego sombree la región y determine el volumen del sólido generado al girar la región sombreada ***R*** alrededor del eje X.



Ejercicio 2:

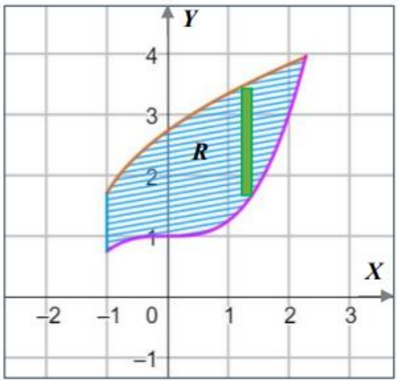


Sea ***R*** la región limitada por las funciones ***f*** y ***g*** y la recta ***x*** = -1. Al girar la región sombreada ***R***, alrededor del eje X, se obtiene el sólido de revolución ***S***, cuya gráfica se visualiza al dar clic en la siguiente imagen

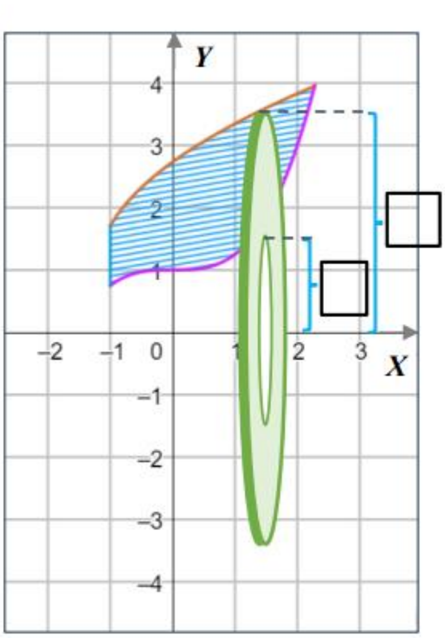


Complete los espacios en blanco:

1) Graficamos el diferencial de *x* (***dx***) en el dominio:



2) Al girar la región ***R*** alrededor del eje X, identificamos la arandela (cilindro hueco), en el dominio:



3) Determine el volumen del sólido ***S***

Determinamos el dominio de la función ***V***:

f(***x***) = ***g***(***x***)

Identificamos el radio mayor: ***R***=

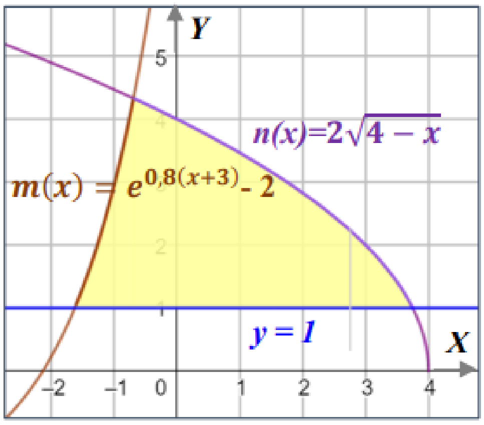
Identificamos el radio menor: ***r*** =

Hallamos el volumen: $V = \pi \int_a^b [(f(x))^2 - (g(x))^2]\, dx$

Ejercicio 3:

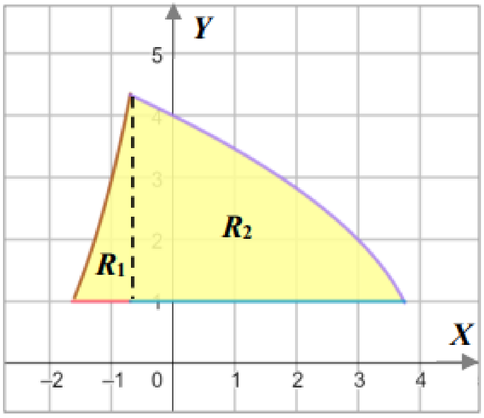
Sea ***R*** la región limitada por las funciones ***m***, ***n*** y la recta ***y*** = 1.

Al girar la región sombreada ***R***, alrededor del eje X, se obtiene el sólido de revolución ***S***, cuya gráfica se visualiza al dar clic en la siguiente imagen.

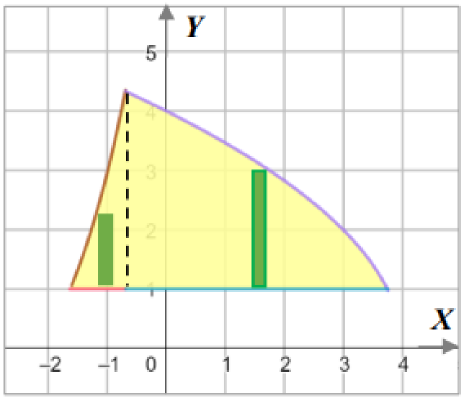


Complete los espacios en blanco:

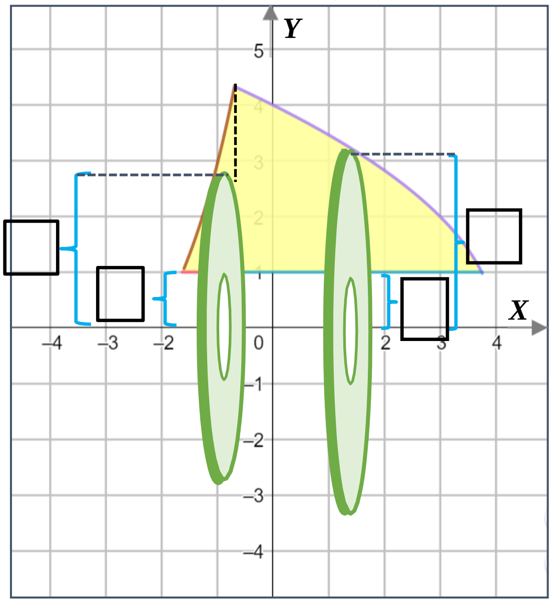
1) Como las funciones son diferentes en todo el dominio, es necesario dividir la región en partes:



2) Graficamos el diferencial de *x* (***dx***) en cada dominio:



3) Al girar las regiones R_1 y R_2 alrededor del eje X, identificamos dos arandelas (cilindros huecos), en cada dominio:



4) Determine el volumen del sólido ***S***:

Para la región R_1:

Identificamos el dominio de la función V_1:

Identificamos el radio mayor: ***R*** =

Identificamos el radio menor: ***r*** =

Hallamos el volumen 1:

V_1=

Para la región R_2:

Identificamos el dominio de la función V_2:

Identificamos el radio mayor: ***R***=

Identificamos el radio menor: ***r*** =

Hallamos el volumen 2:

V_2 =

Volumen total =

PROTOCOLO DE LA TERCERA SESIÓN DE APRENDIZAJE

I. DATOS INFORMATIVOS

1.1. ÁREA	: Ciencia
1.2. CARRERA	: Arquitectura
1.3. DURACIÓN	: 170 minutos
1.4. DOCENTE	: Marlenny Rojas Barrios

II. TÍTULO DE LA SESIÓN	"Volúmenes de sólidos de revolución por el Método de Arandela y el Método del Disco"

III. Aprendizajes esperados

Competencia	Capacidades	Indicadores de desempeño
Determina el volumen de sólidos de revolución, emplea el método de arandela y/o disco y resuelve situaciones de contexto real.	-Interpretar la información basada en diferentes formatos -Representar matemáticamente situaciones a partir de la información brindada -Efectuar operaciones matemáticas mediante algoritmos -Analizar los resultados obtenidos de la aplicación de métodos matemáticos -Explicar las conclusiones de su razonamiento	✍ Nivel de desarrollo de la capacidad de interpretar los sólidos dada la región limitada por una función y el eje X y que gira alrededor del eje X. ✍ Nivel de desarrollo de la capacidad de representar matemáticamente el volumen de un sólido de revolución empleando el Método del Disco ✍ Nivel de desarrollo de la capacidad calcular el volumen de un sólido de revolución haciendo uso de las propiedades de integración o calculadora ✍ Nivel de desarrollo de la capacidad de analizar los resultados obtenidos haciendo uso de la aritmética ✍ Nivel de desarrollo de explicar la mejor decisión teniendo presente el criterio de selección

Momentos	Estrategias	Recursos	Tiempo
INICIO	-La profesora ingresa a la sala de videoconferencia y muestra el material de trabajo. -La profesora muestra el logro de la sesión -La profesora presenta el PPT donde se muestra la gráfica de un sólido y pregunta a los estudiantes de ¿qué manera se puede calcular el volumen de dicho sólido?	-Aula Virtual: Blackboard -PPT -Sala de Videoconferencia -Material de trabajo	10 min
DESARROLLO DE LA CLASE	-A partir de la lluvia de ideas, la profesora muestra el PPT y define el volumen de un sólido. **<u>Capacidad:</u> Interpretar** -La profesora muestra el ejemplo 1, y pregunta a los estudiantes: dada la región (base del sólido) limitada por dos funciones y el eje X, ¿en cuántas regiones se puede dividir la base del sólido?, y ¿cuántos discos necesita emplear para calcular el volumen del sólido? -Para responder a las interrogantes, la profesora da clic en la imagen de GeoGebra y proyecta el sólido en 3D con realidad aumentada y lo comparte con sus estudiantes. -A partir del sólido animado y empleando la realidad aumentada, el estudiante visualiza el sólido y responde que es necesario dividir la región en dos partes y utilizar dos discos. **<u>Capacidad:</u> Representar – Calcular** -La profesora continua con el ejemplo 1 y explica a los estudiantes la manera de representar el volumen del sólido haciendo uso de la suma de integrales definidas. Posteriormente, haciendo uso de la calculadora, se procede a calcular el volumen del sólido. **<u>Capacidad:</u> Interpretar** -La profesora muestra el ejemplo 2, y pregunta a los estudiantes: dada la región (base del sólido) limitada por dos funciones y el eje X, ¿en cuántas regiones se puede dividir la base del sólido?, y ¿cuántos discos o arandelas se	- PPT -Laptop -Pizarra digital -Lápiz digital -Calculadora -Material de trabajo	20 min

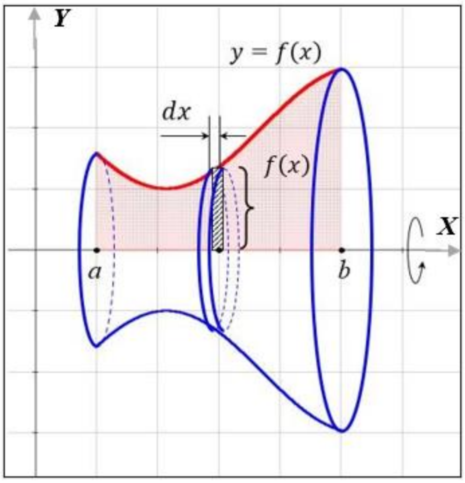
	necesitan emplear para calcular el volumen del sólido? -Para responder a las interrogantes, la profesora da clic en la imagen de GeoGebra y proyecta el sólido en 3D con realidad aumentada y lo comparte con sus estudiantes. -A partir del sólido animado y empleando la realidad aumentada, el estudiante visualiza el sólido y responde que es necesario dividir la región en dos partes y utilizar un disco y una arandela. **<u>Capacidad:</u> Representar – Calcular** -La profesora continua con el ejemplo 2 y explica a los estudiantes la manera de representar el volumen del sólido haciendo uso de la suma de integrales definidas y empleando el método del disco y de la arandela. Posteriormente, haciendo uso de la calculadora, se procede a calcular el volumen del sólido. **<u>Capacidad:</u> Interpretar** -La profesora muestra el ejercicio 1, y pregunta a los estudiantes: dada la región (base del sólido) limitada por dos funciones y el eje X, ¿en cuántas regiones se puede dividir la base del sólido?, y ¿cuántos discos o arandelas se necesitan emplear para calcular el volumen del sólido? -Para responder a las interrogantes, la profesora da clic en la imagen de GeoGebra y proyecta el sólido en 3D con realidad aumentada y lo comparte con sus estudiantes. -A partir del sólido animado y empleando la realidad aumentada, el estudiante visualiza el sólido y responde que es necesario dividir la región en dos partes y utilizar un disco y una arandela. **<u>Capacidad:</u> Representar – Calcular** -Los estudiantes completan el material del ejercicio 1 justificando la razón de particionar la región y plantean la integral definida empleando el método del disco y de la arandela para		30 min

	calcular el volumen de sólido. Posteriormente, haciendo uso de la calculadora, los estudiantes proceden a calcular el volumen del sólido. **<u>Capacidad:</u> Interpretar – Representar - Calcular** -La profesora muestra el ejemplo 3, y haciendo uso del GeoGebra grafica las funciones *f* y *g* solicitadas. Luego con la participación de los estudiantes identifica la región limitada por las gráficas de las funciones de *f*, *g*, la recta $x = 8$ y el eje X. Posteriormente, determinan los puntos de intersección entre cada gráfica que encierra la región, plantea el volumen del sólido haciendo uso del método del disco y calcula su volumen. **<u>Capacidad:</u> Interpretar – Representar - Calcular** -La profesora muestra el ejercicio 2, y pide a los estudiantes que determinen el volumen del sólido generado al girar sobre el eje X la región limitada por las funciones *f*, *g* y el eje X. Los estudiantes grafican las funciones haciendo uso del GeoGebra y determinan los puntos de intersección entre cada gráfica que encierra la región, plantea el volumen del sólido haciendo uso del método del disco y de la arandela y calcula su volumen. **<u>Capacidad:</u> Analizar – Explicar** -La profesora muestra la situación de contexto real y apoyados del ejercicio 2 utilizan el valor del volumen para analizar, empleando los conocimientos previos de la aritmética y posteriormente explicar la decisión tomada		80 min 20 min
CIERRE	-La profesora muestra el último PPT y hace la retro alimentación de la situación de contexto real	-PPT -Laptop	10 min

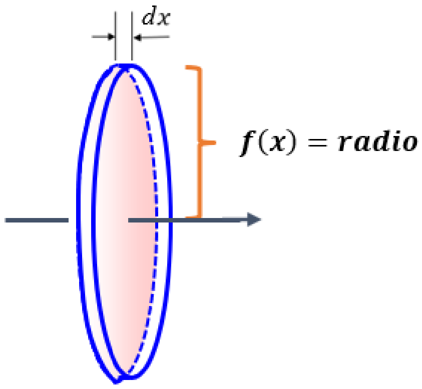
SESIÓN 3: VOLÚMENES DE SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN POR EL MÉTODO DE LA ARANDELA Y EL MÉTODO DEL DISCO

Competencia: Al finalizar la sesión, el estudiante determina el volumen de sólidos de revolución, emplea el método de arandela y/o disco y resuelve situaciones de contexto real.

CASO PARTICULAR: Método del disco[6]



Elemento diferencial:



Diferencial de volumen:

Para calcular el volumen del cilindro, empleamos: $V = \pi r^2 h$

$$\Delta V_i = \pi[f(x)]^2\, dx_i$$

Formalizando tenemos:

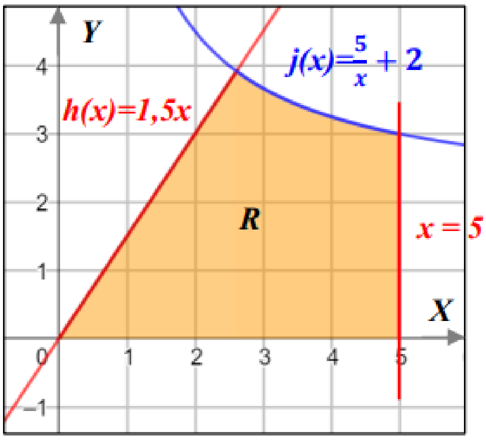
Definición:

El volumen del sólido generado al girar alrededor del eje X la región comprendida entre el eje X y la gráfica de la función continua $y = f(x)$ con $a \leq x \leq b$ es:

$V = \int_a^b \pi(\text{radio})^2\, dx$, es decir $V = \displaystyle\int_a^b \pi\big(f(x)\big)^2\, dx$

[6] Adaptado de CÁLCULO (Thomas - Finney 9edición), pág. 379

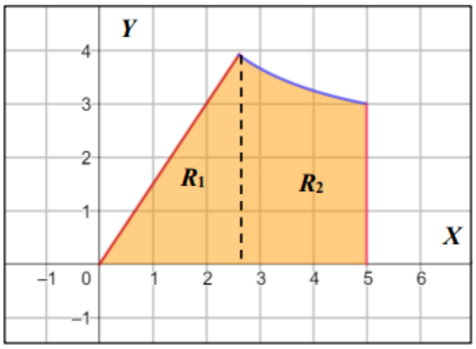
Ejemplo 1:



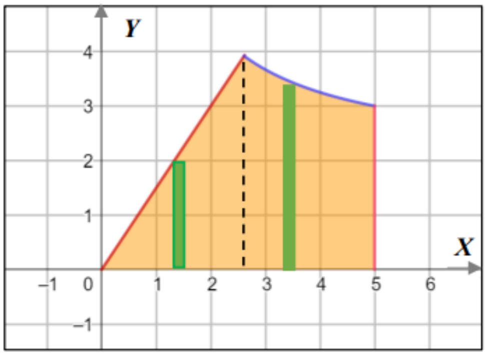
Sea $\boldsymbol{R}$ la región limitada por las funciones $\boldsymbol{h}$, $\boldsymbol{j}$ y la recta $\boldsymbol{x} = 5$ y el eje X. Al girar la región sombreada $\boldsymbol{R}$, alrededor del eje **X**, se obtiene el sólido de revolución S, cuya gráfica se visualiza al dar clic en la siguiente imagen

Complete los espacios en blanco:

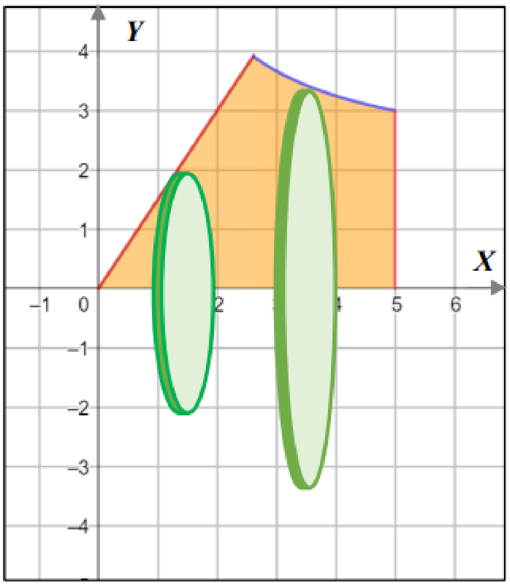
1) Como las funciones son diferentes en todo el dominio, es necesario dividir la región en …..partes:



2) Graficamos el diferencial de x ($\boldsymbol{dx}$) en cada dominio:



3) Al girar las regiones $\boldsymbol{R_1}$ y $\boldsymbol{R_2}$ alrededor del eje X, identificamos dos cilindros, en cada dominio:



4) Determine el volumen del sólido $\boldsymbol{S}$:

Para la región $\boldsymbol{R_1}$:

Identificamos el dominio de la función $\boldsymbol{V_1}$:

Identificamos el radio: r =

Hallamos el volumen 1:

Para la región $\boldsymbol{R_2}$:

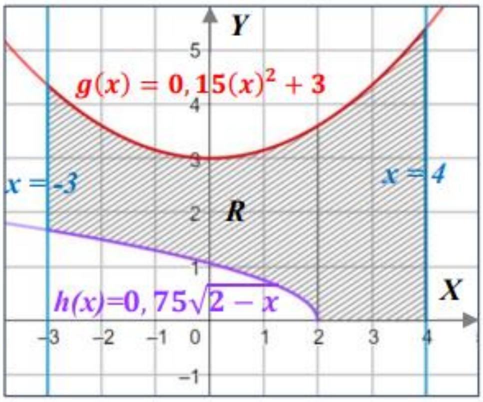
Identificamos el dominio de la función $\boldsymbol{V_2}$:

Identificamos el radio: R =

Hallamos el volumen 2:

Volumen total =

Ejemplo 2:

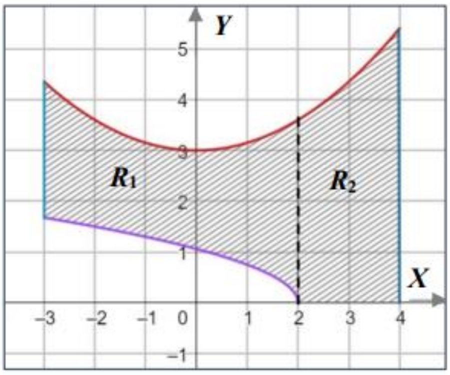


Sea $\boldsymbol{R}$ la región limitada por las funciones $\boldsymbol{g}$, $\boldsymbol{h}$ y las rectas $\boldsymbol{x} = -3$, $\boldsymbol{x} = 4$ y el eje X.

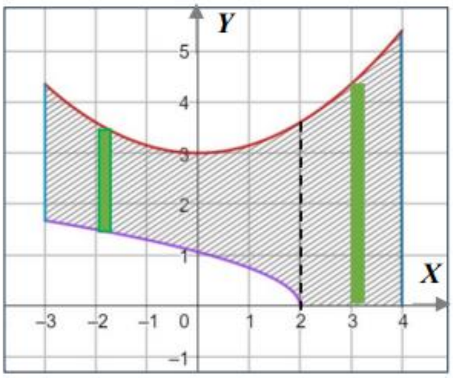
Al girar la región sombreada $\boldsymbol{R}$, alrededor del eje X, se obtiene el sólido de revolución $\boldsymbol{S}$, cuya gráfica se visualiza al dar clic en la siguiente imagen

Complete los espacios en blanco:

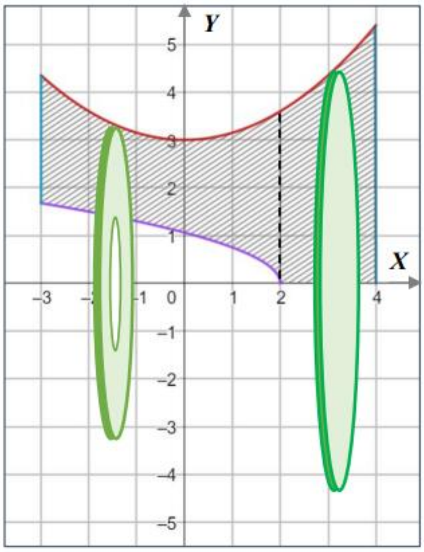
1) Como las funciones son diferentes en todo el dominio, es necesario dividir la región en .... partes:



2) Graficamos el diferencial de *x* (***dx***) en cada dominio:



3) Al girar las regiones $\boldsymbol{R_1}$ y $\boldsymbol{R_2}$ alrededor del eje X, identificamos la arandela y el cilindro, en cada dominio:



4) Determine el volumen del sólido $\boldsymbol{S}$:

Para la región $\boldsymbol{R_1}$:

Identificamos el dominio de la función $\boldsymbol{V_1}$:

Identificamos el radio: R =

Identificamos el radio: r =

Hallamos el volumen 1:

Para la región $\boldsymbol{R_2}$:

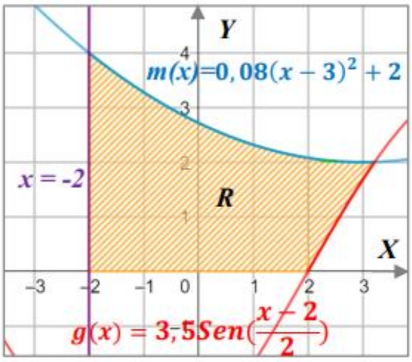
Identificamos el dominio de la función $\boldsymbol{V_2}$:

Identificamos el radio: R =

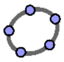
Hallamos el volumen 2:

Volumen total =

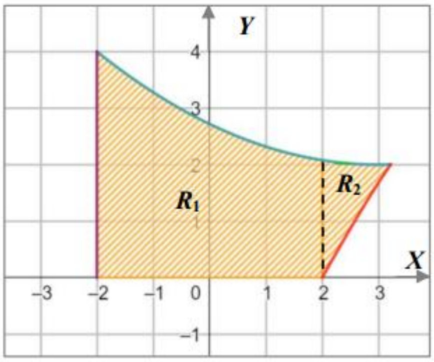
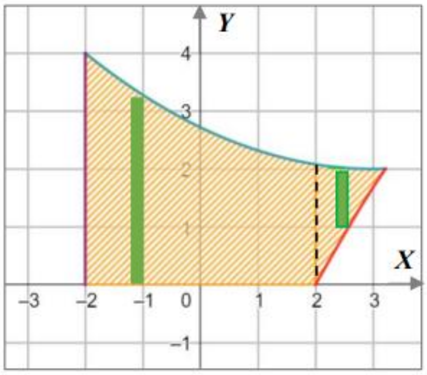
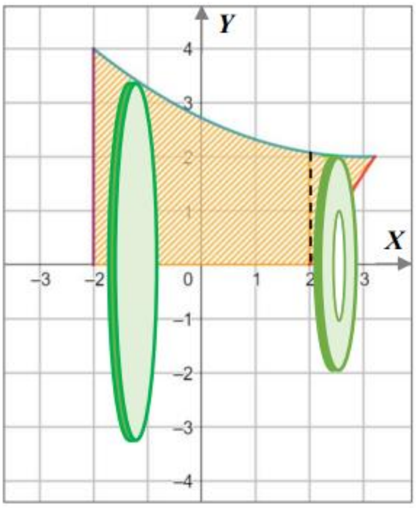
Ejercicio 1:



Sea ***R*** la región limitada por las funciones ***m***, ***g*** y la recta ***x*** = **-2** y el eje X.

Al girar la región sombreada ***R***, alrededor del eje ***X***, se obtiene el sólido de revolución ***S***, cuya gráfica se visualiza al dar clic en la siguiente imagen  

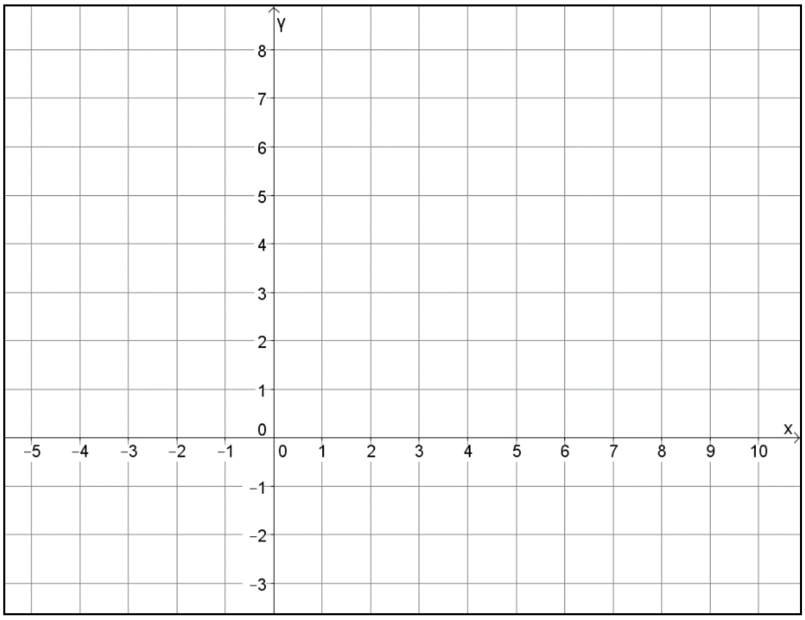
Complete los espacios en blanco:

<table>
<tr>
<td>1) Como las funciones son diferentes en todo el dominio, es necesario dividir la región en .... partes:
</td>
<td>2) Graficamos el diferencial de x (dx) en cada dominio:
</td>
</tr>
<tr>
<td>3) Al girar las regiones R_1 y R_2 alrededor del eje X, identificamos el cilindro y la arandela, en cada dominio:
</td>
<td>4) Determine el volumen del sólido S:
Para la región R_1:
Identificamos el dominio de la función $V1$:
Identificamos el radio: R=
Hallamos el volumen 1:
Para la región R_2:
Identificamos el dominio de la función V_2:
Identificamos el radio: R=
Identificamos el radio: r =
Hallamos el volumen 2:
Volumen total =</td>
</tr>
</table>

Ejemplo 3:

Sea ***R*** la región limitada por la gráfica de las funciones $f(x) = 3x$, $g(x) = \frac{8}{x} + 2$, por la recta $x = 8$ y el eje X. Use GeoGebra para graficar la región ***R*** y determine los puntos de intersección entre cada gráfica que encierra la región. Luego sombree la región y calcule el volumen del sólido generado al girar la región sombreada ***R*** alrededor del eje X.

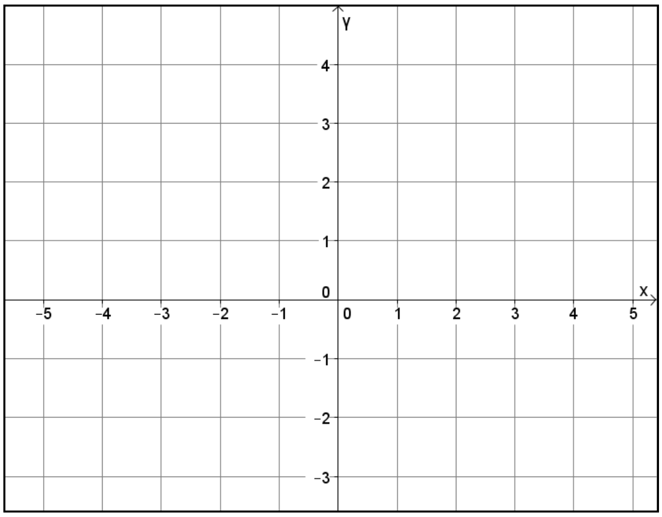
Nota: Muestre su proceso



Ejercicio 2:

Sea ***R*** la región limitada por la gráfica de las funciones $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3$ con $x \in]-2; +\infty[$ $g(x) = \sqrt{1-x}$ y el eje X. Use GeoGebra para graficar la región R y determine los puntos de intersección entre cada gráfica que encierra la región. Luego sombree la región y determine el volumen del sólido generado al girar la región sombreada ***R*** alrededor del eje X.

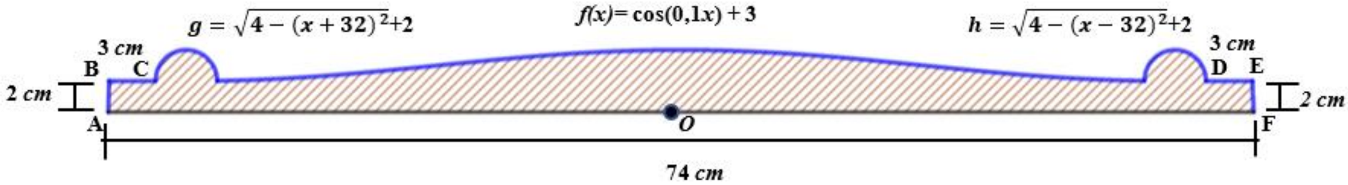
Nota: Muestre su proceso



SITUACIÓN DE CONTEXTO

El Balaustro pino es la opción ideal a la hora de sostener el remate de las barandas de escaleras o balcones. Su elaboración está hecha a base de madera de pino, otorgando un toque distintivo y elegante.
Entre las características del Balaustro pino se puede mencionar la versatilidad que aporta el material de fabricación, ya que se puede apreciar en todo tipo de estilos y gustos como una elección elegante y vanguardista. Los beneficios de este Balaustro es que la madera de pino es una de las más utilizadas para exteriores e interiores y aporta un nuevo aire de arte antiguo, brindando una solución duradera y adecuada para la decoración del mobiliario.

Fernando, diseñador de interiores, ha recibido el encargo de implementar una escalera en la sala principal del “Centro de Convenciones Puerto Nuevo”. El diseño debe ser clásico, inspirado en la arquitectura del siglo XIV. Para ello Fernando, decide contratar los servicios de Manuel, para que fabrique los Balaustros con diseños personalizados, considerando reducir costos.
Dos semanas después, Manuel informa que el diseño exclusivo del Balaustro se encuentra limitada por las funciones $\boldsymbol{g}$, $\boldsymbol{f}$ y $\boldsymbol{h}$ (considerando $\boldsymbol{O}$ como el origen de coordenadas) y los tramos rectos AB, BC, DE y EF, cuya estructura tiene la forma de un sólido S, generado al girar la región sombreada alrededor del eje X y su volumen es 1120,19 cm^3



Además, Manuel presenta a Fernando los modelos de listones de madera que encontró disponibles en la tienda (ver Tabla) para fabricar los balaustros:

Tabla

Tipo de madera	Dimensiones (cm)	Precios	
		Precio por listón	Oferta
Cedro	$10 \times 10 \times 80$	28 soles	Descuento del 10 % sobre el monto total
Pino	$12 \times 12 \times 50$	25 soles	El décimo listón con un descuento de 20%
Cerezo	$12 \times 12 \times 85$	30 soles	Por la compra de 5 listones se obsequian 2 unidades

Si se sabe que, Manuel dispone de 500 soles y debe colocar 24 balaustros en la escalera principal del “Centro de Convenciones Puerto Nuevo”, ¿Manuel podrá realizar la compra de los listones para fabricar los balaustros o deberá solicitar a Fernando un incremento del presupuesto?

Nota: Considere una aproximación a 2 cifras decimales

EXAMEN DE PRE TEST / POST-TEST

NOTA

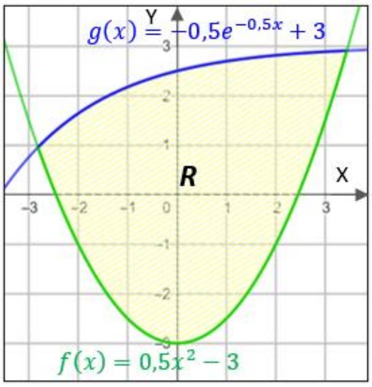
Nombres y Apellidos____

Duración: 90 minutos **Sección: …………**

INDICACIONES: Lee cuidadosamente y marca la respuesta correcta.

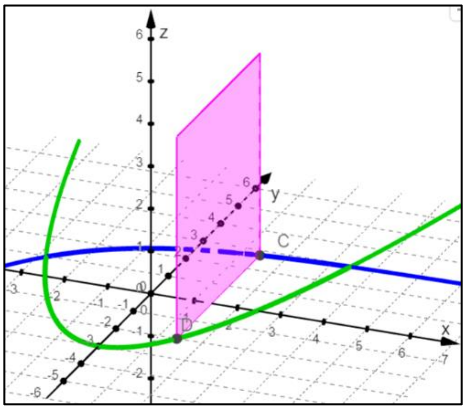
INTERPRETACIÓN: Interpretar la información basada en diferentes formatos

1. Sea ***S*** el sólido cuya base es la región R, limitada por las gráficas de las funciones f y g. Sus secciones transversales paralelas entre sí al plano YZ y perpendiculares a la base del sólido son cuadrados

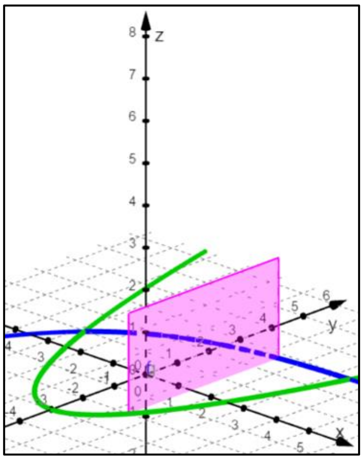


Marque la alternativa de la gráfica de una sección plana paralela al plano YZ: **(1 punto)**

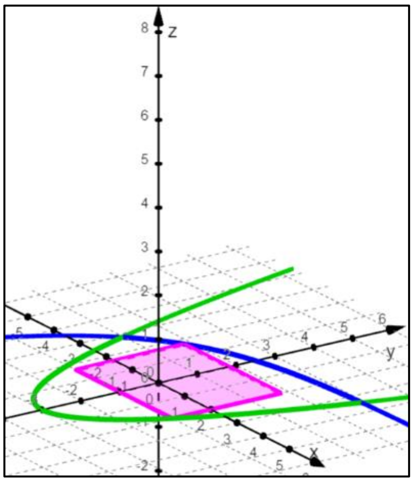
i)



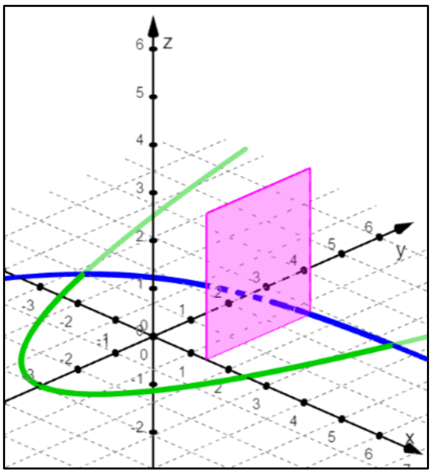
ii)



iii)

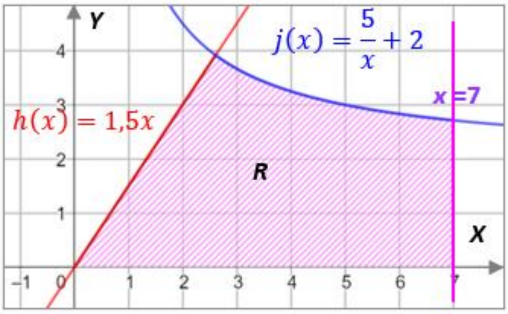


iv)

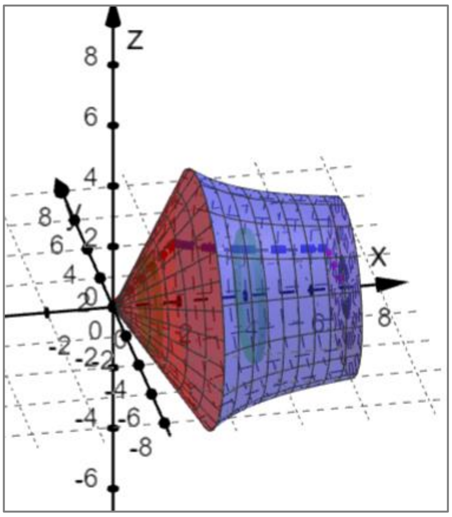


2. Sea R la región limitada por las funciones h, j, la recta x =7 y el eje X.
   Marque la alternativa del sólido S que se genera al girar la región R alrededor del eje X:

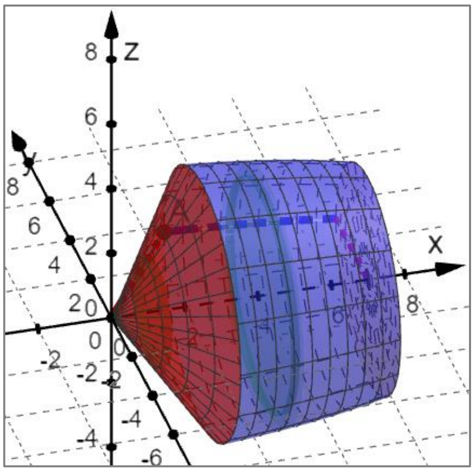
   (1 punto)



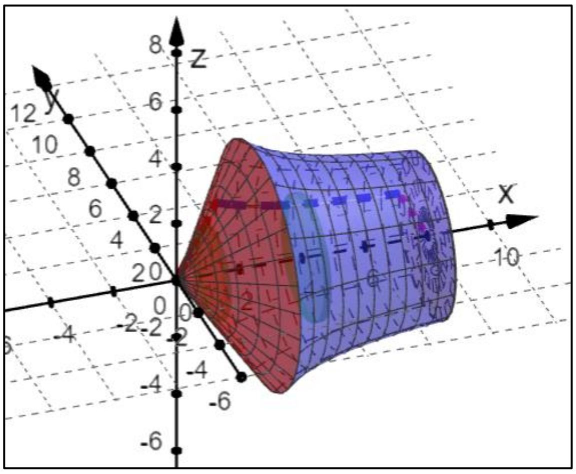
i)



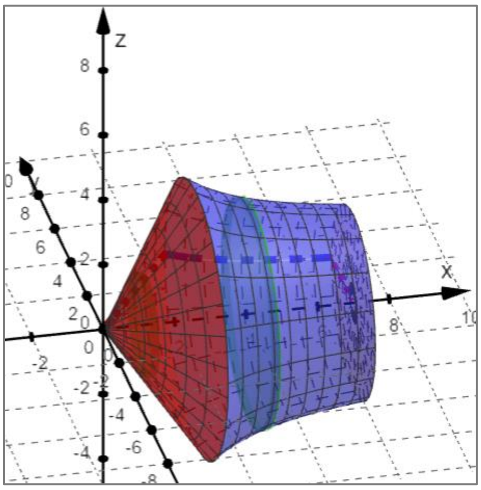
ii)



iii)

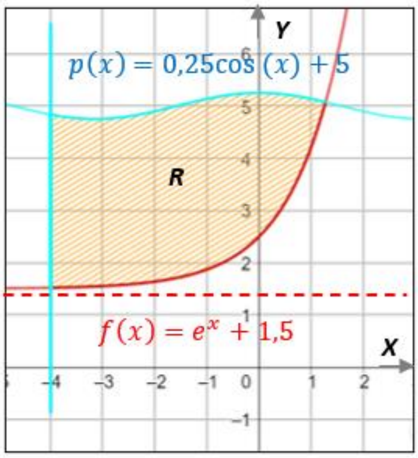


iv)

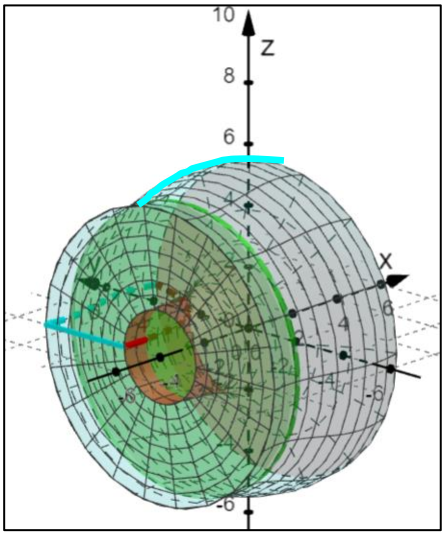


3. Sea R la región limitada por las funciones p, f y la recta x = -4.
   Marque la alternativa del sólido y la arandela que se genera al girar la región R alrededor del eje X:

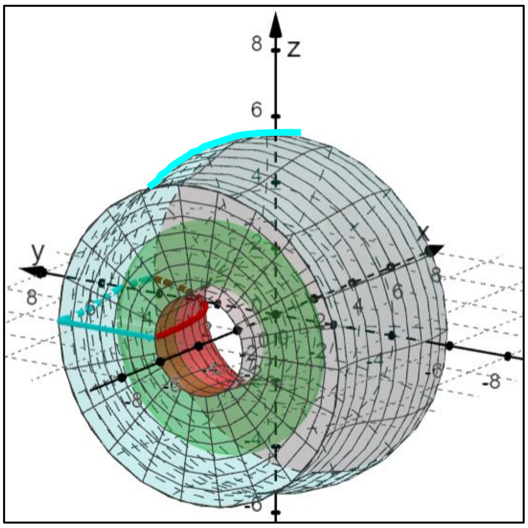
   (1 punto)



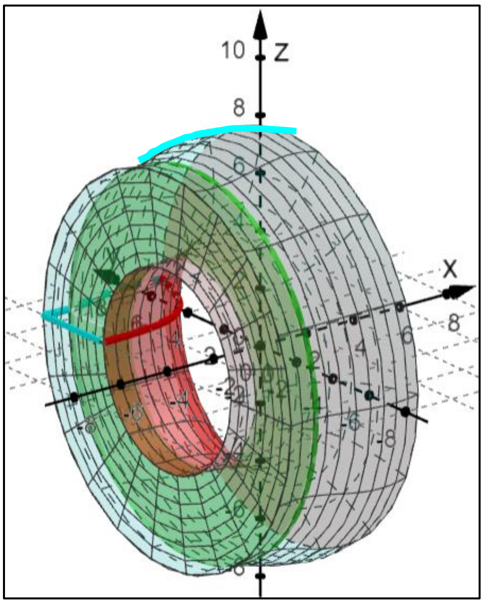
i)



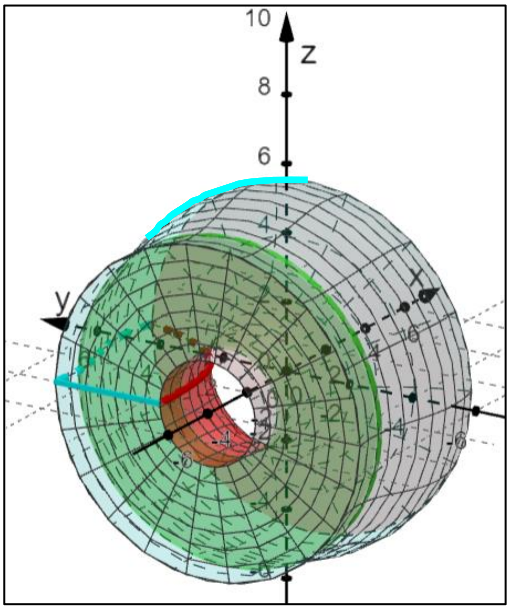
ii)



iii)



iv)



4. Sea R la región limitada por las funciones f y g (ver Figura 1). **(1 punto)**

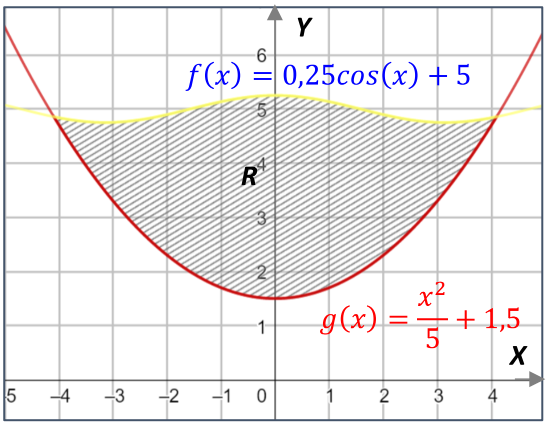
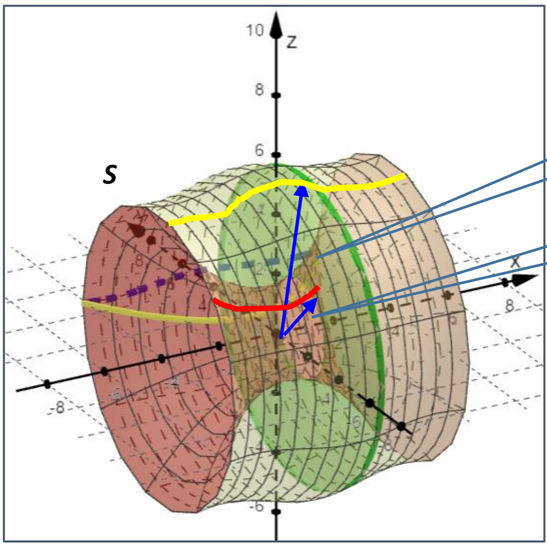


Figura 1

Al girar la región R se genera el sólido S (ver Figura 2)



Radio mayor=

Radio menor =

Figura 2

Escriba los radios mayor y menor de los cilindros que se generan al girar la región R alrededor

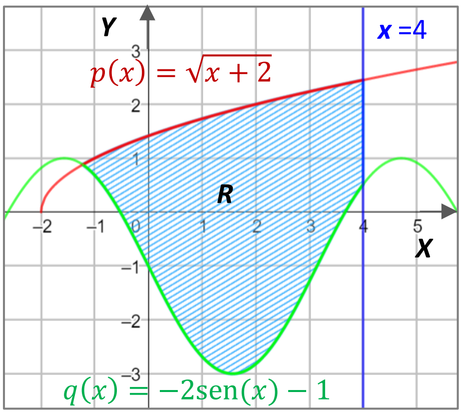
del eje X en los recuadros mostrados a continuación:

Radio mayor: ____

Radio menor: ____

REPRESENTACIÓN: Representar matemáticamente situaciones a partir de la información brindada

5. Sea ***S*** el sólido cuya base es la región *R*, limitada por las gráficas de las funciones *p*, *q* y la recta *x* =4. Sus secciones transversales paralelas entre sí al plano YZ y perpendiculares a la base del sólido son semicírculos. Marque la alternativa que <u>represente</u> el volumen del sólido: **(1 punto)**



a) $V = \frac{\pi}{8}\int_{-1,22}^{4} \left(\sqrt{x+2} + 2\,\text{sen}\,x + 1\right)^2 dx$

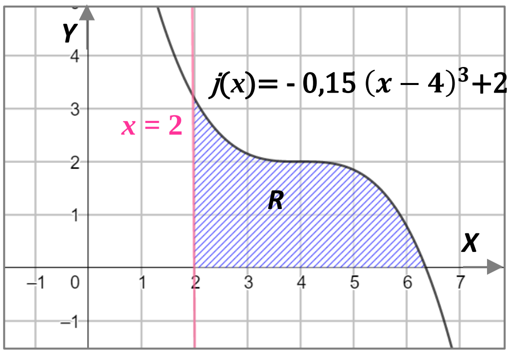
b) $V = \frac{8}{\pi}\int_{-1,22}^{4} \left(\sqrt{x+2} + 2\,\text{sen}\,x - 1\right)^2 dx$

c) $V = \frac{\pi}{8}\int_{-1,05}^{4} (\sqrt{x+2} - 2\,\text{sen}\,x - 1)\, dx$

d) $V = \frac{\pi}{8}\int_{-1,4}^{4} \left(-2\,\text{sen}\,x - 1 - \sqrt{x+2}\right)^2 dx$

6. La figura muestra la región *R* limitada por la función *j*, la recta *x* = 2 y el eje X.
Al girar la región sombreada *R*, alrededor del eje X, se obtiene el sólido de revolución *S*.
Marque la alternativa que <u>represente</u> el volumen del sólido:

(1 punto)



a) $V = \pi\int_{2}^{6,37} (-0{,}15(x-4)^3 + 2)^2\, dx$

b) $V = \int_{2}^{6,37} (-0{,}15(x-4)^3 + 2)^2\, dx$

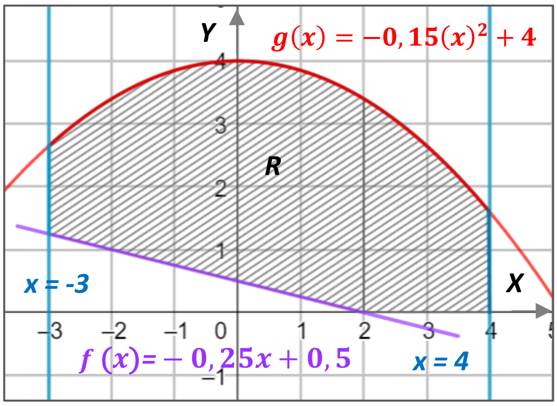
c) $V = \pi\int_{2}^{6,73} (-0{,}15(x-4)^3 + 2)\, dx$

d) $V = \pi\int_{2}^{6,18} (-0{,}15(x-4)^3 - 2)^2\, dx$

7. La siguiente figura muestra la región R limitada por las funciones g, f y las rectas x = -3 y x =4 y el eje X.

   Al girar la región sombreada R, alrededor del eje X, se obtiene el sólido de revolución S.

   Marque la alternativa que <u>represente</u> el volumen del sólido: **(2 puntos)**



a) $V = \pi \int_{-3}^{2} (-0{,}15x^2+4)^2 - (-0{,}25x+0{,}5)^2\,dx + \pi \int_{2}^{4} (-0{,}15(x)^2+4)^2\,dx$

b) $V = \pi \int_{-3}^{2} ((-0{,}25x+0{,}5)^2 - (-0{,}15x^2+4)^2)\,dx + \pi \int_{2}^{4} (-0{,}15(x)^2+4)\,dx$

c) $V = \pi \int_{-3}^{2} (-0{,}15x^2+4)^2 + (-0{,}25x+0{,}5)^2\,dx - \pi \int_{3}^{4} (-0{,}15(x)^2+4)\,dx$

d) $V = \int_{-3}^{3} (-0{,}15x^2+4)^2 + (0{,}25x-0{,}5)^2\,dx + \int_{3}^{4} (-0{,}15(x)^2+4)^2\,dx$

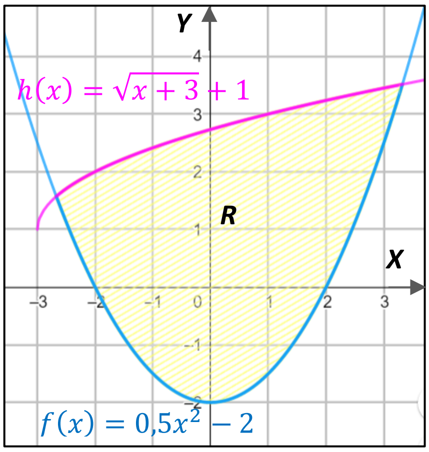
CÁLCULO: Efectuar operaciones matemáticas mediante algoritmos

8. Sea ***S*** el sólido cuya base es la región R limitada por las gráficas de las funciones h y f.

   Sus secciones transversales paralelas entre sí al plano YZ y perpendiculares a la base del sólido, son rectángulos cuya altura mide la quinta parte de la base. Calcule el volumen del sólido S.

   Nota: Considere una aproximación a dos cifras decimales

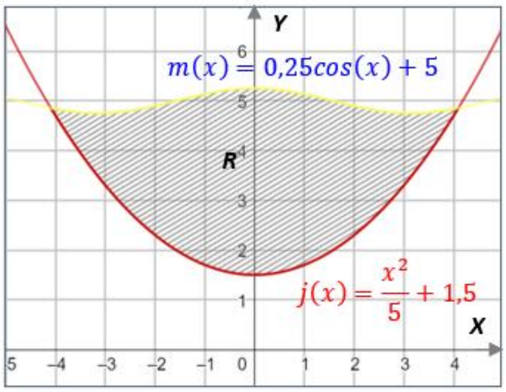
   En el siguiente recuadro escriba su respuesta: **(1 punto)**



9. La figura muestra la región R limitada por las funciones m y j.

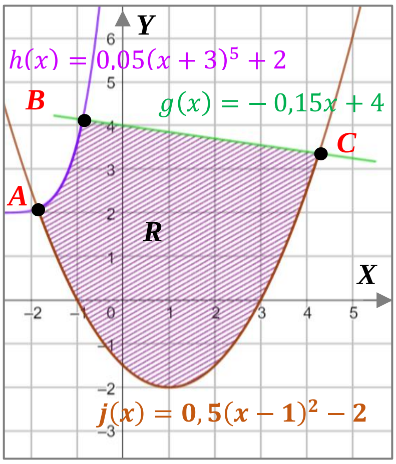
   Al girar la región sombreada R, alrededor del eje X, se obtiene el sólido de revolución S. Calcule el volumen del sólido S.

   Nota: Considere una aproximación a dos cifras decimales. En el siguiente recuadro escriba su respuesta: **(1 punto)**



10. La siguiente figura muestra la base de un sólido ***S*** cuya región ***R*** está limitada por las gráficas de las funciones ***h, g*** y ***j***. Sus secciones transversales paralelas entre sí al plano YZ y perpendiculares a la base del sólido ***S***, son rectángulos cuya altura mide el doble de la base.

Relacione cada uno de los siguientes enunciados con el ítem correcto según corresponda. **(2 puntos)**



i) Los valores de las abscisas *x* de los puntos *A*, *B* y *C* son: **(0,5 puntos)**	A. x_1= -1,86, x_2=-0,88 x_3= 4,27 respectivamente B. x_1= -1,02, x_2= -0,88 x_3= 4,5 respectivamente C. x_1= -1,86, x_2= -0,74 x_3= 4,02 respectivamente
ii)La expresión que representa el volumen del sólido ***S*** es: **(1 punto)**	D. $V = 2\int_{-1,86}^{-0,88}(0{,}05(x+3)^5+4-0{,}5(x-1)^2)^2\,dx + 2\int_{-0,88}^{4,27}(-0{,}15x+6-(0{,}5(x-1)^2)^2\,dx$ E. $V = 2\int_{-1,02}^{-0,88}(0{,}05(x+3)^5+2-(0{,}5(x-1)^2-2)^2\,dx + + \int_{-0,88}^{4,5}((0{,}5(x-1)^2-2-(-0{,}15x+4))^2\,dx$ F. $V = \int_{-1,86}^{-0,74}(0{,}05(x+3)^5-2-(0{,}5(x-1)^2-2)^2\,dx + 2\int_{-0,74}^{4,02}(-0{,}15x+4-(0{,}5(x-1)^2-2)\,dx$
iii) El volumen del sólido ***S*** es: **(0,5 puntos)**	G) 235,73 u³ H) 325,73 u³ I) 215,65 u³

ANÁLISIS: Analizar los resultados obtenidos de la aplicación de métodos matemáticos

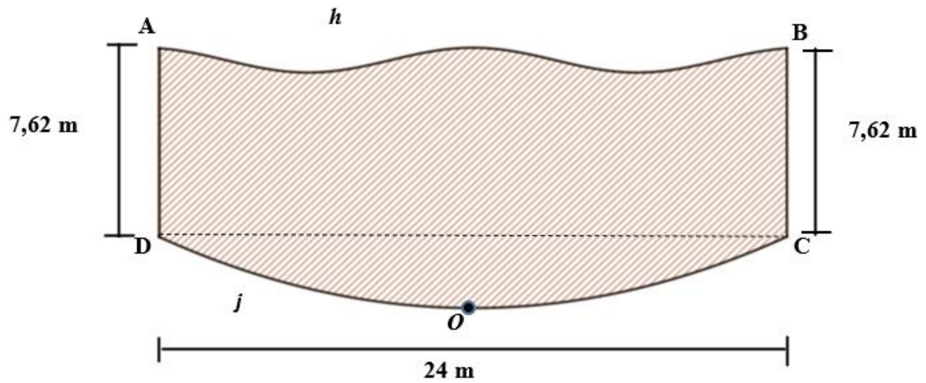
Pregunta 11: **(4 puntos)**

Situación:

Debido a la pandemia que viene atravesando el país, Rosmery propietaria de **seis tiendas** con idénticas dimensiones y diseño, se ha visto en la necesidad de comprar una cantidad determinada de purificadores de aire[7] para garantizar una ventilación adecuada, al mismo tiempo que busca reducir gastos. Por esta razón, Rosmery solicita una asesoría al técnico Fernando para la compra de los purificadores. Después de una conversación productiva, Rosmery comparte la siguiente información:

-La estructura de la tienda está constituida, por una base limitada por los puntos A, B, C y D, sobre la cual se levantan paredes de 5 m de altura y su techo presenta un diseño innovador.

-La base de la tienda ABCD tiene un área de 216,40 m^2 y se encuentra limitada por las funciones ***h*** y ***j*** cuyas reglas de correspondencia son $h(x) = 0{,}5\cos(0{,}5x) + 10$ y $j(x) = 0{,}02x^2$ respectivamente (considerando ***O*** como el origen de coordenadas) y los segmentos rectos AD y BC. La estructura del techo de la tienda tiene la forma de un sólido que se genera al considerar secciones transversales planas paralelas entre sí al plano YZ y perpendiculares al segmento DC son triángulos equiláteros.



Después de una inspección adecuada a la tienda, el técnico Fernando informa que el volumen de la tienda es de 1935,06 m^3 y manifiesta que, para realizar la compra de los purificadores de aire, es importante determinar el número de cambios por hora, la cual se obtiene con la siguiente fórmula[8]:

$$Cambios\ de\ aire\ por\ hora = \frac{\text{tasa de ventilación de aire exterior}\,\frac{m^3}{min}\cdot\frac{60min}{h}}{Volumen(m^3)}$$

[7] Dispositivo que elimina los elementos contaminantes, convirtiendo cualquier espacio interior en un ambiente libre de partículas.

[8] Tasa de ventilación de aire exterior es 115 m^3/min

Para realizar la compra de las estufas, el técnico Fernando cuenta con la siguiente información:

Modelo	Cambios de aire por hora	Precios	
		8-14 (purificadores)	15-25 (purificadores)
Dyson Pure Cool [9]	3 - 6	850 soles c/u	752,85 soles c/u
LW-220 Beurer [10]	3 - 8	775,35 soles c/u	650,75 soles c/u
Bionaire BAP1700 [11]	1 - 3	700,35 soles c/u	600,75 soles c/u

¿Cuántos purificadores por tienda necesita comprar Rosmery?

[9] El purificador limpia el aíre de un área de hasta 120 m^2
[10] El purificador limpia el aíre de un área de hasta 80 m^2
[11] El purificador limpia el aíre de un área de hasta 100 m^2

ARGUMENTACIÓN: Explicar las conclusiones de su razonamiento

Pregunta 12:

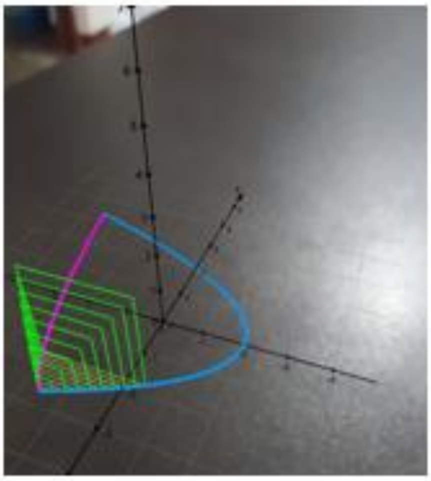
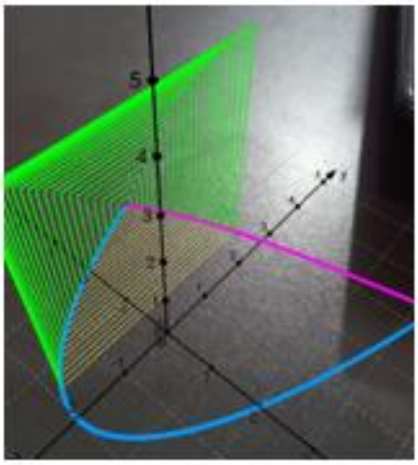
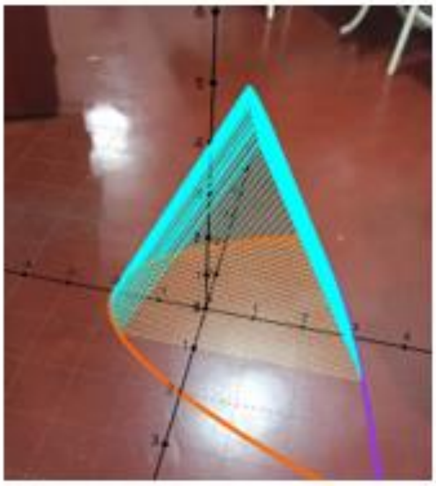
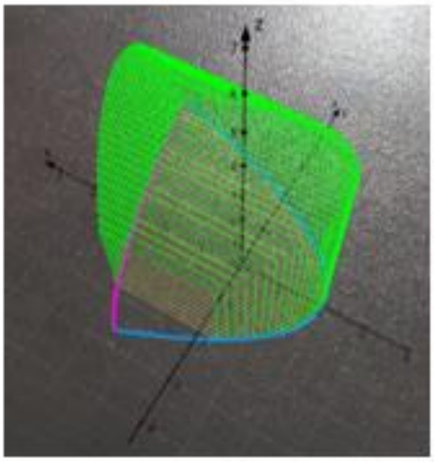
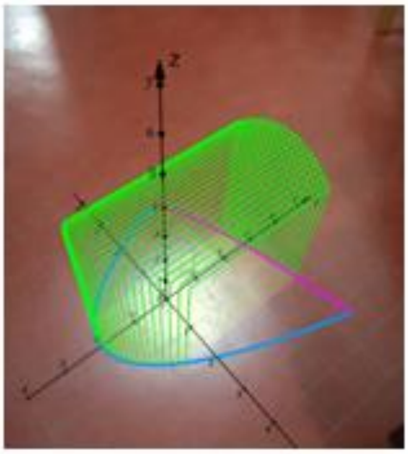
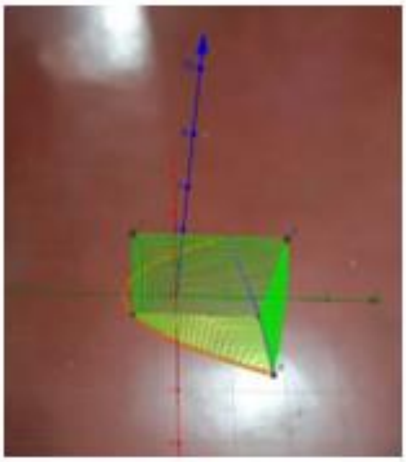
Basado en el contexto de la pregunta 11, si el técnico Fernando puede comprar 2 purificadores modelos Dyson Pure Cool o puede comprar 3 purificadores modelos LW-220 Beurer por tienda, ¿cuál es el purificador más conveniente para ventilar **todas** las tiendas? **(2,0 puntos)**

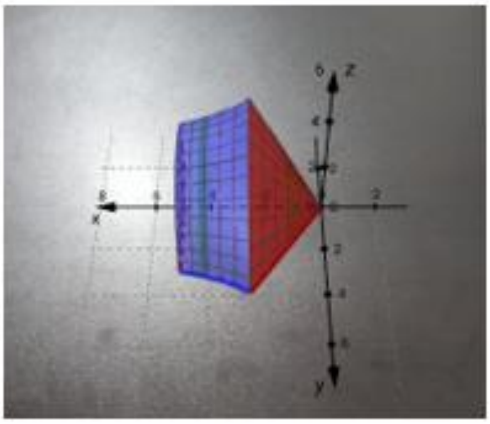
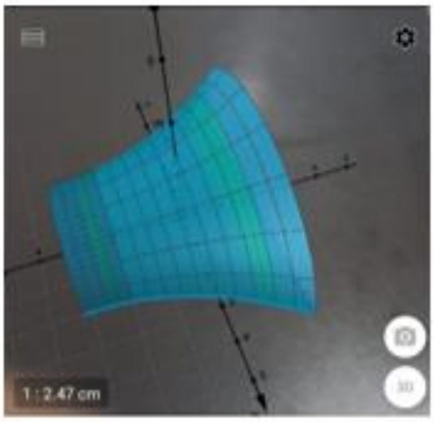
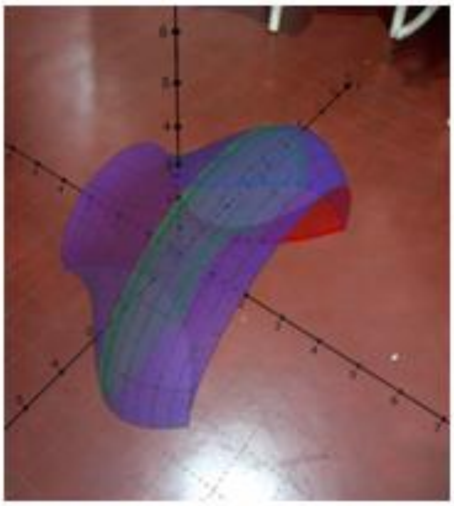
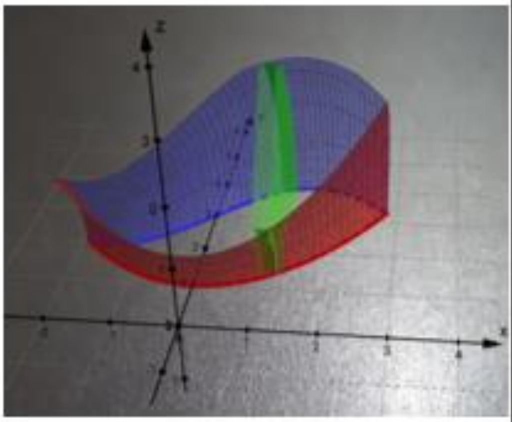
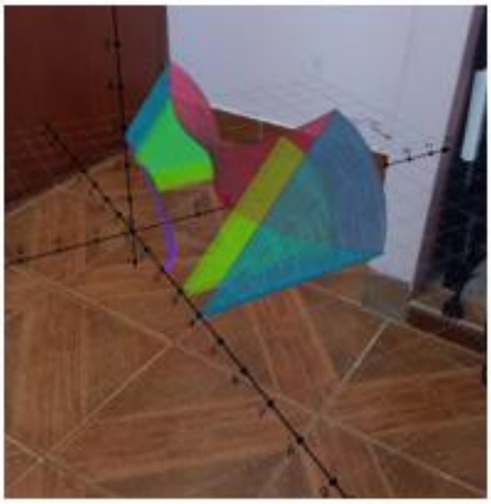
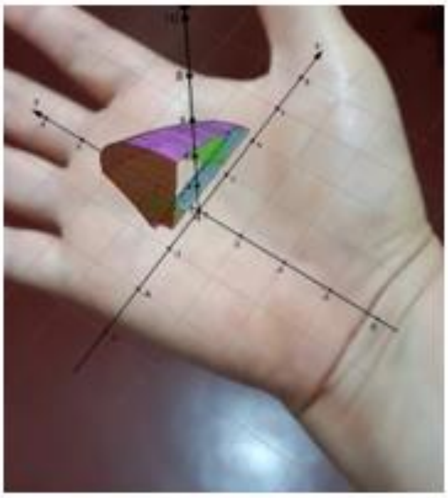
a) El purificador más conveniente es el modelo LW-220 Beurer
b) El purificador más conveniente es el modelo Bionaire BAP1700
c) El purificador más conveniente es el modelo Dyson Pure Cool
d) Los tres cuestan lo mismo.

Si el técnico Fernando cuenta con un presupuesto de 15 000 soles para la compra de los purificadores de una misma marca, ¿es posible realizar la compra de los purificadores?

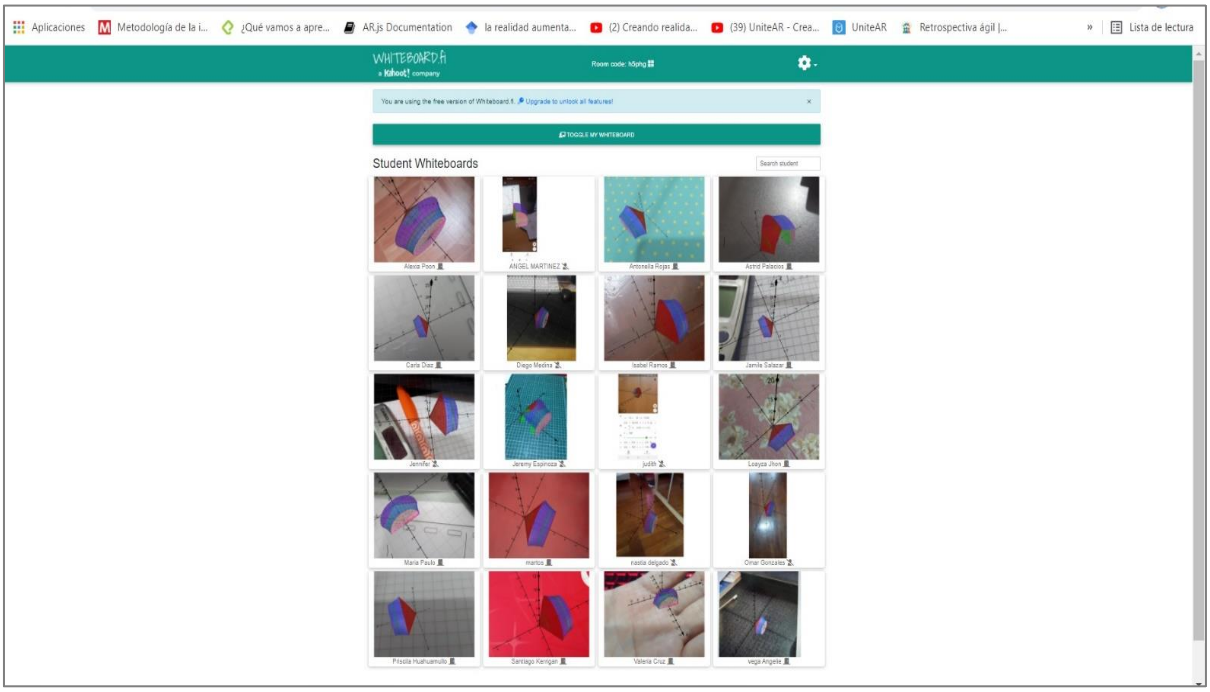
(2,0 puntos)

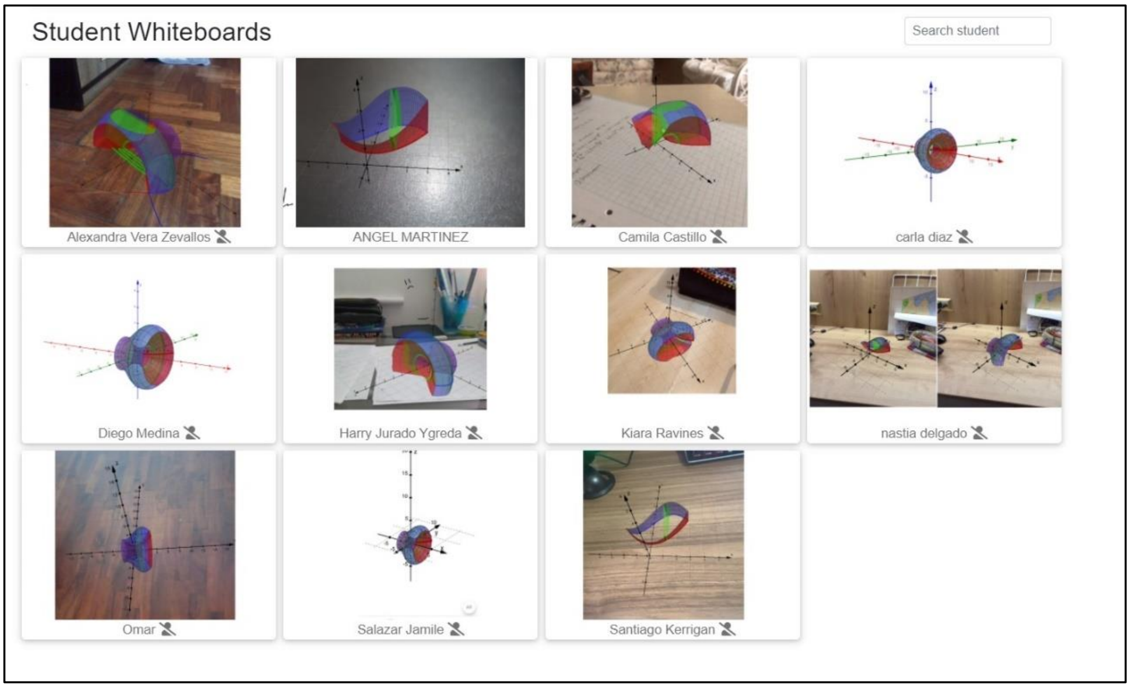
FOTOS DE LOS SÓLIDOS EN REALIDAD AUMENTADA

<table>
<tr><th colspan="2">Sólido por secciones planas</th></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
</table>

Sólido de revolución	
	
	
	

EVIDENCIAS DE CLASES





Anexo 3: Validación de instrumentos

MATRIZ DE VALIDACION DEL INSTRUMENTO DE OBTENCION DE DATOS

Título de la investigación: La realidad aumentada como herramienta interactiva para el aprendizaje de las aplicaciones de la integral definida en estudiantes de la carrera de Arquitectura de la Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas

Apellidos y nombres del investigador: Rojas Barrios Marlenny

Apellidos y nombres del experto: Villarreal Montenegro Yuliana

ASPECTO POR EVALUAR					OPINION DEL EXPERTO		
VARIABLES	**Capacidades**	**INDICADORES**	**ITEM /PREGUNTA**	**ESCALA**	**SI CUMPLE**	**NO CUMPLE**	**OBSERVACIONES / SUGERENCIAS**
VARIABLE INDEPENDIENTE: Uso de la realidad aumentada como herramienta interactiva para la enseñanza de las aplicaciones de la integral definida.		No requiere	No requiere	No requiere	No requiere	No requiere	No requiere
VARIABLE DEPENDIENTE: Nivel de Aprendizaje de las aplicaciones de la integral definida por los estudiantes universitarios de Lima Metropolitana	Interpretar	Nivel de desarrollo de la capacidad de interpretar la información basada en diferentes formatos	1)	0-1 punto	1		Bien pensado, preciso y directo para utilizar concepto básico
			2)	0-1 punto	1		Interesante porque debe reconocer el radio del disco que se genera al girar la región
			3)	0-1 punto	1		Importante sepa reconocer la arandela gráficamente
			4)	0-1 punto	1		Bien propuesto, que reconozcan el radio interno y externo de la arandela gráficamente
	Representar	Nivel de desarrollo de la capacidad de representar matemáticamente situaciones a partir de la información brindada	5)	0-1 punto	1		Muy bien, sólo es usar la fórmula correcta
			6)	0-1 punto	1		Muy bien, sólo es usar la fórmula correcta
			7)	0-2 puntos	2		Muy bien, sólo es usar la fórmula correcta
	Calcular	Nivel de desarrollo de la capacidad de efectuar operaciones matemáticas mediante Algoritmos	8)	0-1 puntos	1		No requiere
			9)	0-1 puntos	1		No requiere
			10)	0-2 puntos	2		No requiere
	Analizar	Nivel de desarrollo de la capacidad de analizar los resultados obtenidos de la aplicación de métodos matemáticos	11)	0-4 puntos	4		Bien pensado, debe leer y tener en cuenta toda la información brindada, incluso las notas de pie de página para poder calcular y discriminar resultados.
	Explicar	Nivel de desarrollo de la capacidad de explicar las conclusiones de su razonamiento	12)	0-4 puntos	3		La primera parte de la pregunta es importante especificar por qué es más conveniente un determinado modelo, si es por menor gasto, o es por mayor purificación, o porque hace menos cambios de hora, etc. Por lo general los alumnos tienden a decir si o no cumple mas no el criterio de su respuesta. La condición de presupuesto está acorde.
			TOTAL	20 puntos	19		
			Fecha 27 / 05 / 2021				

Firma: Dra. Yuliana Villarreal Montenegro

MATRIZ DE VALIDACION DEL INSTRUMENTO DE OBTENCION DE DATOS

Título de la investigación: La realidad aumentada como herramienta interactiva para el aprendizaje de las aplicaciones de la integral definida en estudiantes de la carrera de Arquitectura de la Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas

Apellidos y nombres del investigador: Rojas Barrios Marlenny

Apellidos y nombres del experto: Velásquez Millones Iván

ASPECTO POR EVALUAR					OPINION DEL EXPERTO		
VARIABLES	**Capacidades**	**INDICADORES**	**ITEM /PREGUNTA**	**ESCALA**	**SI CUMPLE**	**NO CUMPLE**	**OBSERVACIONES / SUGERENCIAS**
VARIABLE INDEPENDIENTE: Uso de la realidad aumentada como herramienta interactiva para la enseñanza de las aplicaciones de la integral definida.		No requiere	No requiere	No requiere	No requiere	No requiere	No requiere
VARIABLE DEPENDIENTE: Nivel de Aprendizaje de las aplicaciones de la integral definida por los estudiantes universitarios de Lima Metropolitana	Interpretar	Nivel de desarrollo de la capacidad de interpretar la información basada en diferentes formatos	1)	0-1 punto	1		
			2)	0-1 punto	1		
			3)	0-1 punto	1		
			4)	0-1 punto	1		
	Representar	Nivel de desarrollo de la capacidad de representar matemáticamente situaciones a partir de la información brindada	5)	0-1 punto	1		
			6)	0-1 punto	1		
			7)	0-2 puntos	2		
	Calcular	Nivel de desarrollo de la capacidad de efectuar operaciones matemáticas mediante Algoritmos	8)	0-1 puntos	1		
			9)	0-1 puntos	1		
			10)	0-2 puntos	2		
	Analizar	Nivel de desarrollo de la capacidad de analizar los resultados obtenidos de la aplicación de métodos matemáticos	11)	0-4 puntos	4		
	Explicar	Nivel de desarrollo de la capacidad de explicar las conclusiones de su razonamiento	12)	0-4 puntos	4		
			TOTAL	20 puntos	20		
			Fecha 24/ 05 / 2021				

Firma: Dr. Iván Velásquez Millones

MATRIZ DE VALIDACIÓN DEL INSTRUMENTO DE OBTENCIÓN DE DATOS							
Título de la investigación: La realidad aumentada como herramienta interactiva para el aprendizaje de las aplicaciones de la integral definida en estudiantes de la carrera de Arquitectura de la Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas							
Apellidos y nombres del investigador: Rojas Barrios Marlenny							
Apellidos y nombres del experto: Velarde Vela Luis Fernando							
ASPECTO POR EVALUAR					**OPINION DEL EXPERTO**		
VARIABLES	**Capacidades**	**INDICADORES**	**ITEM /PREGUNTA**	**ESCALA**	**SI CUMPLE**	**NO CUMPLE**	**OBSERACIONES / SUGERENCIAS**
VARIABLE INDEPENDIENTE: Uso de la realidad aumentada como herramienta interactiva para la enseñanza de las aplicaciones de la integral definida.		No requiere	No requiere	No requiere	No requiere	No requiere	No requiere
VARIABLE DEPENDIENTE: Nivel de Aprendizaje de las aplicaciones de la integral definida por los estudiantes universitarios de Lima Metropolitana	Interpretar	Nivel de desarrollo de la capacidad de interpretar la información basada en diferentes formatos	1)	0-1 punto	1		Ninguno
			2)	0-1 punto	1		Ninguno
			3)	0-1 punto	1		Ninguno
			4)	0-1 punto	1		Ninguno
	Representar	Nivel de desarrollo de la capacidad de representar matemáticamente situaciones a partir de la información brindada	5)	0-1 punto	1		Ninguno
			6)	0-1 punto	1		Ninguno
			7)	0-2 puntos	2		Ninguno
	Calcular	Nivel de desarrollo de la capacidad de efectuar operaciones matemáticas mediante Algoritmos	8)	0-1 puntos	1		Ninguno
			9)	0-1 puntos	1		Ninguno
			10)	0-2 puntos	2		Ninguno
	Analizar	Nivel de desarrollo de la capacidad de analizar los resultados obtenidos de la aplicación de métodos matemáticos	11)	0-4 puntos	4		Ninguno
	Explicar	Nivel de desarrollo de la capacidad de explicar las conclusiones de su razonamiento	12)	0-4 puntos	3		Se entiende la pregunta, quizá se pueda resaltar el criterio a tener en cuenta, reducir costos.
			TOTAL	20 puntos	19		
			Fecha 26/ 05 / 2021				

Firma: Dr. Luis Fernando Velarde Vela

MATRIZ DE VALIDACIÓN DEL INSTRUMENTO DE OBTENCIÓN DE DATOS

Título de la investigación: La realidad aumentada como herramienta interactiva para el aprendizaje de las aplicaciones de la integral definida en estudiantes de la carrera de Arquitectura de la Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas

Apellidos y nombres del investigador: Rojas Barrios Marlenny

Apellidos y nombres del experto: Gálvez Morales Lourdes

ASPECTO POR EVALUAR					OPINION DEL EXPERTO		
VARIABLES	Capacidades	INDICADORES	ITEM /PREGUNTA	ESCALA	SI CUMPLE	NO CUMPLE	OBSERACIONES / SUGERENCIAS
VARIABLE INDEPENDIENTE: Uso de la realidad aumentada como herramienta interactiva para la enseñanza de las aplicaciones de la integral definida. VARIABLE DEPENDIENTE:		No requiere	No requiere	No requiere	No requiere	No requiere	No requiere
Nivel de Aprendizaje de las aplicaciones de la integral definida por los estudiantes universitarios de Lima Metropolitana	Interpretar	Nivel de desarrollo de la capacidad de interpretar la información basada en diferentes formatos	1)	0-1 punto	1		
			2)	0-1 punto	1		
			3)	0-1 punto	1		
			4)	0-1 punto	1		
	Representar	Nivel de desarrollo de la capacidad de representar matemáticamente situaciones a partir de la información brindada	5)	0-1 punto	1		
			6)	0-1 punto	1		
			7)	0-2 puntos	2		
	Calcular	Nivel de desarrollo de la capacidad de efectuar operaciones matemáticas mediante algoritmos	8)	0-1 punto	1		
			9)	0-1 punto	1		
			10)	0 - 2 puntos	2		
	Analizar	Nivel de desarrollo de la capacidad de analizar los resultados obtenidos de la aplicación de métodos matemáticos	11)	0-4 puntos	4		
	Explicar	Nivel de desarrollo de la capacidad de explicar las conclusiones de su razonamiento	12)	0-4 puntos	4		
			TOTAL	20 puntos	20 puntos		
			Fecha 29 / 05 /2021				

Firma: Lourdes Gálvez Morales

MATRIZ DE VALIDACIÓN DEL INSTRUMENTO DE OBTENCIÓN DE DATOS

Título de la investigación: La realidad aumentada como herramienta interactiva para el aprendizaje de las aplicaciones de la integral definida en estudiantes de la carrera de Arquitectura de la Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas

Apellidos y nombres del investigador: Rojas Barrios Marlenny

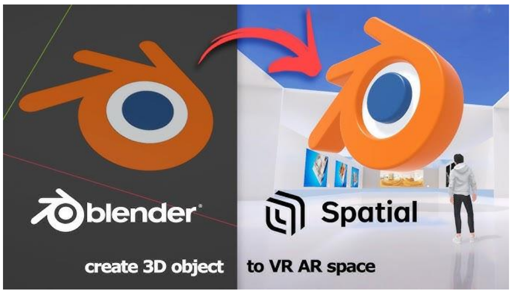
Apellidos y nombres del experto: Ruiz Salazar Jenny María

ASPECTO POR EVALUAR					OPINION DEL EXPERTO		
VARIABLES	**Capacidades**	**INDICADORES**	**ITEM /PREGUNTA**	**ESCALA**	**SI CUMPLE**	**NO CUMPLE**	**OBSERVACIONES / SUGERENCIAS**
VARIABLE INDEPENDIENTE: Uso de la realidad aumentada como herramienta interactiva para la enseñanza de las aplicaciones de la integral definida. VARIABLE DEPENDIENTE:		No requiere	No requiere	No requiere	No requiere	No requiere	No requiere
Nivel de Aprendizaje de las aplicaciones de la integral definida por los estudiantes universitarios de Lima Metropolitana	Interpretar	Nivel de desarrollo de la capacidad de interpretar la información basada en diferentes formatos	1)	0-1 punto	1		
			2)	0-1 punto	1		
			3)	0-1 punto	1		
			4)	0-1 punto	0,5		No se aprecian bien el radio mayor y menor
	Representar	Nivel de desarrollo de la capacidad de representar matemáticamente situaciones a partir de la información brindada	5)	0-1 punto	1		
			6)	0-1 punto	1		
			7)	0-2 puntos	2		
	Calcular	Nivel de desarrollo de la capacidad de efectuar operaciones matemáticas mediante algoritmos	8)	0-1 punto	1		
			9)	0-1 punto	1		
			10)	0 - 2 puntos	1		Se sugiere colocar cada ítem por separado ya que confunden todas las opciones a la vez.
	Analizar	Nivel de desarrollo de la capacidad de analizar los resultados obtenidos de la aplicación de métodos matemáticos	11)	0-4 puntos	4		
	Explicar	Nivel de desarrollo de la capacidad de explicar las conclusiones de su razonamiento	12)	0-4 puntos	3		En el primer ítem de esta pregunta se recomienda no poner alternativas ya que se está evaluando la argumentación que consiste en explicar las conclusiones.
			TOTAL	20 puntos	17,5 puntos		
			Fecha 29 / 05 /2021				

Firma: Jenny María Ruiz Salazar

Anexo 4: Materiales didácticos recomendados

MATERIALES	DESCRIPCIÓN
	▪ Descargue e Instale Unity y Vuforia. ▪ Abra Unity y cree un nuevo proyecto. Seleccione la plantilla 3D y nombre su proyecto. ▪ Active Vuforia. ▪ Cree una base de datos y agregue imágenes o modelos 3D que desee utilizar como objetivos de RA. ▪ En Unity, vaya a la pestaña de GameObject, seleccione Vuforia Engine y añada un AR Camera. Esto reemplazará la cámara principal de Unity y permite la visualización de contenido de RA. ▪ Agregue un Image Target desde el mismo menú. ▪ Importe los modelos 3D que desees mostrar cuando se detecte el objetivo. ▪ Conecte el dispositivo móvil a su computadora y asegúrate de que este configurada para el desarrollo. Luego compile y ejecute la aplicación en el dispositivo.
	▪ Cree una cuenta ▪ Descargue la aplicación en su dispositivo. ▪ Acceda al panel de control. ▪ Cree una nueva aura: Aquí puede subir el contenido que desee mostrar en realidad aumentada, como imágenes, videos o modelos 3D. ▪ Personalice la experiencia de RA, agregue texto y otros elementos interactivos. ▪ Visualice en la aplicación HP Reveal en su dispositivo para escanear el activador y pruebe la experiencia de la RA. ▪ Publique el aura para que otros usuarios puedan escanear.

	▪ Descargue Blender ▪ Cree un nuevo proyecto ▪ Utilice las herramientas de modelado de Blender para que cree sus objetos 3D. ▪ Texturice sus modelos usando un sistema de nodos. ▪ Anime sus modelos en 3D y utilice una línea de tiempo, además de las herramientas de animación. ▪ Exporte en formato adecuado (FBX, OBJ y GITF/GLB) ▪ Importe su modelo 3D en ARKit, ARCore, A-Frame. ▪ Compile y ejecute la aplicación en un dispositivo móvil para asegurarse de que el modelo se visualiza correctamente
	▪ Regístrese y acceda a ZapWorks ▪ Elija la herramienta adecuada (ZapWorks Studio/ZapWorks Designer/ ZapWorks Widgets) ▪ Pruebe la experiencia AR antes de ser publicada. Utilice Zappar App. ▪ Publique su modelo. Zappar genera un código QR o un zapcode (código de rastreo exclusivo de Zappar) que puede integrar en materiales impresos o digitales. ▪ Se puede utilizar las herramientas de análisis para ver la cantidad de veces que se ha escaneado el código, cuánto tiempo han interactuado con la AR, y desde que lugar se accede.

Anexo 5: Estrategia didáctica

ESTRATEGIA
PRIMERA SESIÓN: **Duración: 3 h** ▪ **Título**: Sólidos: Cilindro / Cono / Esfera ▪ **Curso**: Matemática Básica ▪ **Competencia**: Describe las propiedades geométricas del cilindro, cono y esfera, identifica las diferencias y semejanzas entre sus fórmulas de área y volumen; luego resuelve problemas contextualizados. ▪ **Recursos didácticos**: GeoGebra 3D - RA / Videos / Dispositivos móviles ▪ **Actividades (2 horas):** **Método de Singapur (CPA):** Concreto/Pictórico/Abstracto **i) Nivel Concreto:** **Materiales:** El docente proporciona a los estudiantes modelos digitales de un cilindro, un cono y una esfera (creados en GeoGebra 3D y RA). **Exploración:** El docente pide a los estudiantes que observen los sólidos los manipulen (ampliar, reducir) mediante el aplicativo ARCore. Invítalos a buscar sólidos en su entorno (objetos, edificaciones) que tengan la forma de un cilindro, cono o esfera. **Observación de propiedades:** Guía a los estudiantes para que identifiquen y describan características como la base circular del cilindro y el cono, o la curvatura continua de la esfera. **Discusión:** Facilita una conversación sobre el uso y la presencia de estos sólidos en el mundo real. El estudiante relaciona los conceptos abstractos-matemáticos con elementos del mundo real. Para ello, el estudiante responde la siguiente pregunta: ¿qué figuras conocidas observas cilindros/esferas/conos? El estudiante va a ser capaz de adquirir la destreza de identificar, dentro de su entorno, las figuras geométricas propuestas. **ii) Nivel Pictórico:** **Dibujos y Descomposición:** Entrega a los estudiantes una hoja donde dibujen un cilindro, un cono y una esfera, indicando sus elementos. Puede incluir un esquema de "descomposición" del cilindro en rectángulos y círculos al mostrar su desarrollo (área lateral) en una figura plana. **Relación de Áreas y Volúmenes:** Utiliza diagramas para ilustrar cómo se calcula el área de la base y la altura de cada figura.

Comparación de Formas: Pide a los estudiantes que comparen los sólidos dibujados en términos de sus bases, alturas y propiedades (por ejemplo, la esfera no tiene una base plana).

El docente explica el concepto y utilidad del sólido geométrico y responde ¿qué es el cilindro/esfera/cono?

iii) **Nivel abstracto:**

Fórmulas de Área y Volumen: El docente presenta las fórmulas para calcular el volumen y el área de la superficie del cilindro, cono y esfera.

Resolución de Problemas: El docente brinda a los estudiantes problemas que involucren el cálculo de volumen o área de los sólidos en situaciones contextualizadas, como calcular la cantidad de agua que cabe en un vaso cilíndrico o el espacio ocupado por una bola.

Reflexión sobre la Relación de Volúmenes: Oriente a los estudiantes a notar que el volumen de un cono es un tercio del volumen de un cilindro con la misma base y altura. Utilice preguntas que ayuden a deducir esta relación.

El docente pide a los estudiantes calcular el área y volumen del sólido elegido y que resuelvan situaciones contextualizadas mediante fórmulas matemáticas.

Al finalizar los estudiantes socializan sus resultados con dos de sus compañeros que escogieron sólidos diferentes.

- **Evaluación (1 hora):**

Evaluación de procesos: Resolución colaborativa de problemas matemáticos

-Los estudiantes resuelven (parejas) los problemas matemáticos (30 minutos).

-Cada pareja intercambia su solución y califican la evaluación apoyados en la rúbrica (20 minutos)

-Se realiza la retroalimentación de la situación problemática que tuvieron mayor dificultad (10 minutos)

<table>
<tr><td colspan="2">SITUACIÓN 1</td></tr>
<tr><td colspan="2">La Institución Educativa “Sagrado Corazón de Jesús” ha instalado un nuevo sistema de abastecimiento de agua para garantizar su uso. Este sistema incluye un tanque de almacenamiento de agua en forma de cilindro recto de 2,5 metros de radio y 3 metros de altura. ¿Cuál es la capacidad máxima (en litros) de agua que puede contener el tanque?
Considere: 1 m^3 = 1000 litros, $\pi \approx 3{,}14$
</td></tr>
<tr><td>PLANTEAMIENTO</td><td>CÁLCULO</td></tr>
<tr><td></td><td>Respuesta:</td></tr>
<tr><td colspan="2">SITUACIÓN 2</td></tr>
<tr><td colspan="2">Un diseñador ha propuesto construir una cúpula en forma de semiesfera de 2 m de radio, la cual se ubicará en la parte superior de la biblioteca principal. ¿Cuántos m^2 de pintura se necesitarán para cubrir la superficie lateral de la cúpula?
Considere: $\pi \approx 3{,}14$
</td></tr>
<tr><td>PLANTEAMIENTO</td><td>CÁLCULO</td></tr>
<tr><td></td><td>Respuesta:</td></tr>
<tr><td colspan="2">SITUACIÓN 3</td></tr>
<tr><td colspan="2">Un arquitecto ha diseñado un techo en forma de cono recto de 2 m de altura y 3 m de radio de la base para una torre de observación. El equipo de construcción necesita recubrir el techo con un material resistente a la intemperie.
El jefe de obra solicita calcular la cantidad de material necesario para recubrirlo.
Considere: $\pi \approx 3{,}14$
</td></tr>
<tr><td>PLANTEAMIENTO</td><td>CÁLCULO</td></tr>
<tr><td></td><td>Respuesta:</td></tr>
</table>

RÚBRICA

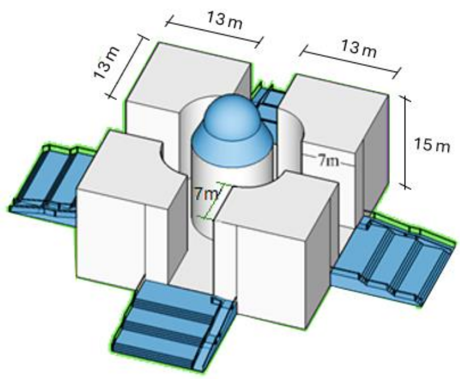
Capacidades	Indicadores	Suficiente	Proceso	Insuficiente
Identifica cilindros, conos y esferas en objetos o estructuras del mundo real.	El estudiante identifica cilindros, conos y esferas en diferentes objetos del mundo real y los relaciona.	El estudiante identifica correctamente cilindros, conos y esferas en algunos objetos del mundo real y los relaciona.	El estudiante identifica de manera parcial cilindros, conos y esferas en objetos del mundo real o presenta dificultades para establecer relaciones	El estudiante presenta dificultades para identificar cilindros, conos y esferas en objetos del mundo real y no establece relaciones entre ellos.
Plantea una expresión matemática que permita hallar el área y/o volumen de cilindros, conos y esferas.	El estudiante plantea una expresión matemática que permita hallar el área y/o volumen de cilindros, conos y esferas	El estudiante plantea correctamente una expresión matemática que permita hallar el área y/o volumen de cilindros, conos y esferas	El estudiante plantea de manera parcial una expresión matemática que permita hallar el área y/o volumen de cilindros, conos y esferas	El estudiante plantea con dificultad una expresión matemática que permita hallar el área y/o volumen de cilindros, conos y esferas.
Realiza cálculos y resuelve problemas relacionados con cilindros, conos y esferas.	El estudiante realiza cálculos y resuelve problemas relacionados con cilindros, conos y esferas de manera precisa, utilizando fórmulas, procedimientos y algoritmos.	El estudiante realiza cálculos y resuelve problemas relacionados con cilindros, conos y esferas correctamente.	El estudiante realiza cálculos y resuelve problemas relacionados con cilindros y conos de manera limitada, cometiendo varios errores operativos en el proceso.	El estudiante presenta dificultades para realizar cálculos y resolver problemas relacionados con cilindros, conos y esferas y comete errores conceptuales en el proceso.

ESTRATEGIA
SEGUNDA SESIÓN: **Duración: 3 h** ▪ **Título**: Sólidos: Cilindro / Cono / Esfera ▪ **Competencia**: Describe las propiedades geométricas del cilindro, cono y esfera, identifica las diferencias y semejanzas entre sus fórmulas de área y volumen; luego resuelve problemas contextualizados. ▪ **Recursos didácticos**: GeoGebra/ RA / Videos / Dispositivos móviles ▪ **Actividades (10 minutos):** - Explicación de la dinámica de trabajo de DESAFÍO DE VOLÚMENES Y FORMAS - Exploración de los sólidos cilindro, cono y semiesfera utilizando el móvil y ARCore para identificar sus elementos. ▪ **Evaluación (170 minutos):** **Evaluación de producto:** **-**Los estudiantes resuelven en grupo de 5 integrantes las preguntas planteadas (60 minutos). **-**Los grupos proceden a sustentar de acuerdo con el orden designado por el docente (100 minutos). -Se realiza la retroalimentación de la pregunta que presentaron mayor dificultad (10 minutos).

DESAFÍO DE VOLÚMENES Y FORMAS

SITUACIÓN: Fumigación del centro empresarial

En un moderno centro empresarial, conformado por una auditorio principal y cuatro salas secundarias de iguales dimensiones, se ha programado una fumigación exhaustiva en el interior de sus instalaciones. El auditorio principal, ubicado al centro del edificio, presenta una geometría particular, la base tiene forma cilíndrica, la sección central es un tronco de cono, y la parte superior está constituida por una semiesfera, tal como se muestra en la Figura 1.



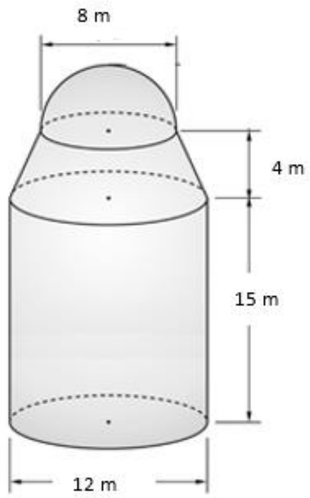


Figura 1

Con el objetivo de prevenir y controlar riesgos sanitarios en el auditorio principal, es fundamental aplicar una dosis adecuada del fumigante. Para ello, es importante calcular la cantidad exacta de producto a utilizar, siguiendo el procedimiento descrito a continuación:

$$Dosis\ total = Volumen\ del\ ambiente(m^3) \times Dosis\ unitaria(g/m^3)$$

donde la dosis unitaria del fumigante considerada para este proceso es de 32 g/m^3.

El centro empresarial solicita determinar la cantidad de producto a utilizar en la fumigación del auditorio principal.

Nota: Para los cálculos del volumen de los ambientes deberá omitir el espesor de los muros.

Considere: $\pi \approx 3{,}14$

RÚBRICA

Criterio de Evaluación	Suficiente	Proceso	Insuficiente
Actividades desarrolladas	El estudiante completa la actividad requerida de manera correcta y demuestra conocimiento de los conceptos matemáticos empleados.	El estudiante completa parcialmente la actividad requerida de manera correcta y demuestra poco conocimiento de los conceptos matemáticos empleados.	El estudiante resuelve la actividad requerida de manera incorrecta y demuestra errores en los conceptos matemáticos.
Producto final	El estudiante presenta un producto final de alta calidad resolviendo de manera correcta la situación matemática planteada en el *"Desafío de Volúmenes y formas"*.	El estudiante presenta un producto final de mediana calidad resolviendo parcialmente la situación matemática planteada en el *"Desafío de Volúmenes y formas"*.	El estudiante presenta un producto final que cumple con los requisitos básicos del *"Desafío de Volúmenes y formas"* y resuelve de manera deficiente la situación planteada.
Trabajo colaborativo	El estudiante participa de manera activa en la resolución de la situación y trabaja de manera coordinada con sus compañeros.	El estudiante participa de manera regular en la resolución de la situación y trabaja de manera poco coordinada con sus compañeros.	El estudiante participa de manera eventual en la resolución de la situación y trabaja de manera aislada de sus compañeros.