INSTITUTO PARA LA CALIDAD DE EDUCACIÓN

SECCIÓN DE POSGRADO

CONCEPTOS FUNDAMENTALES DEL CÁLCULO Y SU INCIDENCIA EN EL DESARROLLO DE CAPACIDADES PROCEDIMENTALES PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS

PRESENTADA POR

RUTH ARACELY GÓMEZ BALDERA

ASESOR

OSCAR RUBÉN SILVA NEYRA

TESIS

PARA OPTAR EL GRADO ACADÉMICO DE MAESTRA EN EDUCACIÓN CON MENCIÓN EN DOCENCIA E INVESTIGACIÓN UNIVERSITARIA

LIMA – PERÚ

2019

INSTITUTO PARA LA CALIDAD DE EDUCACIÓN

SECCIÓN DE POSGRADO

CONCEPTOS FUNDAMENTALES DEL CÁLCULO Y SU INCIDENCIA EN EL DESARROLLO DE CAPACIDADES PROCEDIMENTALES PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS

TESIS PARA OPTAR

EL GRADO ACADÉMICO DE MAESTRA EN EDUCACIÓN

CON MENCIÓN EN DOCENCIA E INVESTIGACIÓN UNIVERSITARIA

PRESENTADO POR:

RUTH ARACELY GÓMEZ BALDERA

ASESOR:

DR. OSCAR RUBÉN SILVA NEYRA

LIMA, PERÚ

2019

CONCEPTOS FUNDAMENTALES DEL CÁLCULO Y SU INCIDENCIA EN EL DESARROLLO DE CAPACIDADES PROCEDIMENTALES PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS

ASESOR Y MIEMBROS DEL JURADO

ASESOR:

Dr. Oscar Rubén Silva Neyra

PRESIDENTE DEL JURADO:

Dr. Vicente Justo Pastor Santiváñez Limas

MIEMBROS DEL JURADO:

Dr. Carlos Augusto Echaiz Rodas

Dr. Miguel Luis Fernández Avila

DEDICATORIA

A Dios por iluminar mi camino día a día, así mismo a mis padres porque con su amor y paciencia fueron los autores de mi formación. A mis hermanas por estar siempre presentes cuando más las necesito. A mi esposo y mi hijo por ser mi motivación para superarme cada día más.

AGRADECIMIENTOS

A mi asesor de Tesis, el Dr. Rubén Silva, por guiarme satisfactoriamente en el desarrollo de esta investigación. Al Ing. Miguel Meza, por incentivarme a seguir estudios de Posgrado en la USMP. A la Srta. Rosy Gómez Baldera, porque con sus conocimientos ha colaborado en la realización de esta tesis.

ÍNDICE

ÍNDICE DE TABLAS

ÍNDICE DE FIGURAS

RESUMEN

La tesis tiene por objetivo determinar la relación entre los conceptos fundamentales del cálculo y el desarrollo de capacidades procedimentales en la resolución de problemas de estudiantes universitarios; siendo estas habilidades, la capacidad de calcular, analizar e interpretar.

Así mismo, la tesis cuenta con un enfoque cuantitativo, de diseño observacional - no experimental, analítico – descriptivo, correlacional - corte transversal.

Para lograr el objetivo deseado, se evaluaron a 60 estudiantes con una serie de preguntas del cálculo que incluían parte teórica y práctica relacionados al desarrollo de cada destreza. Los resultados que arrojaron estas evaluaciones muestran que el puntaje que obtiene el estudiante en la parte práctica es menor o se asemeja al puntaje de la parte teórica; además, se evidencia que el estudiante puede haber aprobado la parte teórica, pero desaprueba la parte práctica; concluyendo así, que los conceptos fundamentales del cálculo inciden significativamente en el desarrollo de capacidades procedimentales, específicamente en la resolución de problemas de estudiantes universitarios.

Palabras claves: cálculo, capacidades procedimentales, calcular, analizar e interpretar.

ABSTRACT

The goald of the thesis is to determine la relation between the fundamental concepts of calculus and the development of procedural abilities in solving problems of university students, these skills are the ability to calculate, analyze and interpret.

Likewise, the thesis has a quantitative approach, of observational design - not experimental, analytical - descriptive, correlational - transversal cut.

To achieve the desired goald, 60 students were evaluated with a series of questions of the calculus that included theoretical and practical part related to the development of each capacity, the results that showed these evaluations show that the score obtained by the student in the practical part is lower or it resembles the theoretical part score, it also shows that the student may have approved the theoretical part, but they disapprove the practical part, concluding that the fundamental concepts of calculus have a significant impact on the development of procedural abilities, specifically, in solving problems of university students.

Keywords: Calculus, procedural abilities, calculate, analyze, interpret.

INTRODUCCIÓN

La presente investigación tuvo como objetivo determinar la relación entre los conceptos fundamentales del cálculo y el desarrollo de capacidades procedimentales para la resolución de problemas en estudiantes de diferentes carreras de la universidad ESAN que cursan la asignatura de Cálculo I, correspondiente al segundo ciclo.

Uno de los problemas claves de la Educación Universitaria es cómo debe ser el desarrollo de los temas relacionados a matemática para generar un mejor aprendizaje, tanto en conceptos matemáticos como en resolución de problemas. Del mismo modo, otro reto en matemáticas es lograr que el estudiante desarrolle ciertas capacidades de razonamiento abstracto, lógico, analítico o aplicativo que serán útiles para el estudiante no sólo en las ciencias sino a lo largo de su vida diaria.

En este sentido, el problema principal del presente trabajo es ¿Cuál es la relación entre los conceptos fundamentales del cálculo y en el desarrollo de capacidades procedimentales, específicamente en la resolución de problemas de estudiantes universitarios?.

El objetivo general es: Determinar la relación entre los conceptos fundamentales del cálculo y el desarrollo de capacidades procedimentales en la resolución de problemas de estudiantes universitarios.

La hipótesis es: Los conceptos fundamentales del cálculo se relacionan significativamente con el desarrollo de dichas capacidades procedimentales en la resolución de problemas de estudiantes universitarios.

En esta investigación se verá la relación que tiene la base teórica de temas relacionados con el cálculo, con las capacidades que se desarrollarán en el proceso de resolución de problemas en dichos temas. Es importante para la motivación del estudiante en el aprendizaje de matemática saber para qué le será útil la resolución de problemas matemáticos; por ello, en el presente trabajo se mostrará lo fundamental que es este aspecto para la resolución de situaciones en la vida diaria.

El título de esta tesis sólo consta de dos variables. Además, el acceso para poder evaluar a los estudiantes de la universidad ESAN es limitado, por tal motivo solamente serán evaluados un número determinado de estudiantes.

Esta tesis es de enfoque cuantitativo, de diseño no experimental, de un nivel descriptivo, correlacional - corte transversal, además se seleccionó una población o universo de 495 estudiantes de diferentes carreras de la universidad ESAN que cursan la asignatura de Cálculo I, correspondiente al segundo ciclo, de esta población se seleccionó una muestra empleando una fórmula, con un nivel de confianza de 0,9 y un margen de error de 0,1; obteniendo así una muestra de 60 estudiantes, entre los cuales hay 22 varones y 38 mujeres.

El contenido de la tesis está estructurada en 5 capítulos:

Desarrollándose en el primer capítulo el marco teórico, el segundo capítulo las hipótesis y variables y tercer capítulo metodología de la investigación, en el cuarto capítulo presentamos los resultados de la investigación y en el quinto capítulo desarrollamos la discusión, conclusión y recomendaciones.

CAPÍTULO I: MARCO TEÓRICO

1.1 Antecedentes de la investigación.

1.1.1 Acosta, G. (2013). Evolución del perfil cognitivo, metacognitivo, actitudinal y de rendimiento en estudiantes con dificultades de aprendizaje en matemáticas: un estudio longitudinal (Tesis doctoral). Universidad de Valencia, Valencia.

OBJETIVO GENERAL

El objetivo es analizar la evolución de las dificultades del aprendizaje de las matemáticas en la última etapa de primaria, a través del estudio de las manifestaciones cognitivas, metacognitivas, actitudinales y el rendimiento en matemáticas de estudiantes sólo con dificultades del aprendizaje en matemáticas (DAM), sólo con dificultades del aprendizaje en letras (DAL), con ambos problemas (DAML) y sin dificultades (Control), esto se realizará mediante una evaluación inicial en 4º de primaria y luego en 6º de primaria.

RESULTADOS

1. Cálculo

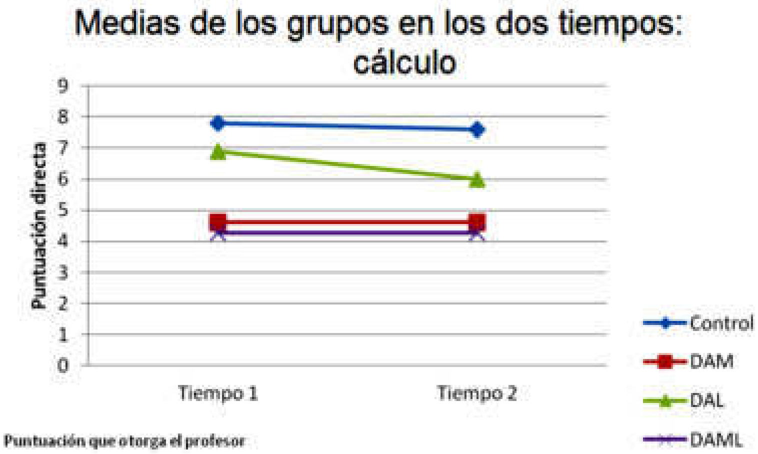


Figura 1. Media de los grupos en los dos tiempos: cálculo

En el tiempo 1 y 2 el grupo Control mostró la puntuación más alta, en tanto los grupos DAM y DAML mostraron la menor puntuación; en el tiempo 2 los grupos DAM y DAML mostraron la misma puntuación, el grupo Control disminuyó en una mínima cantidad su puntuación y el grupo DAL disminuyó significativamente su puntuación.

2. Comprensión de problemas matemáticos.

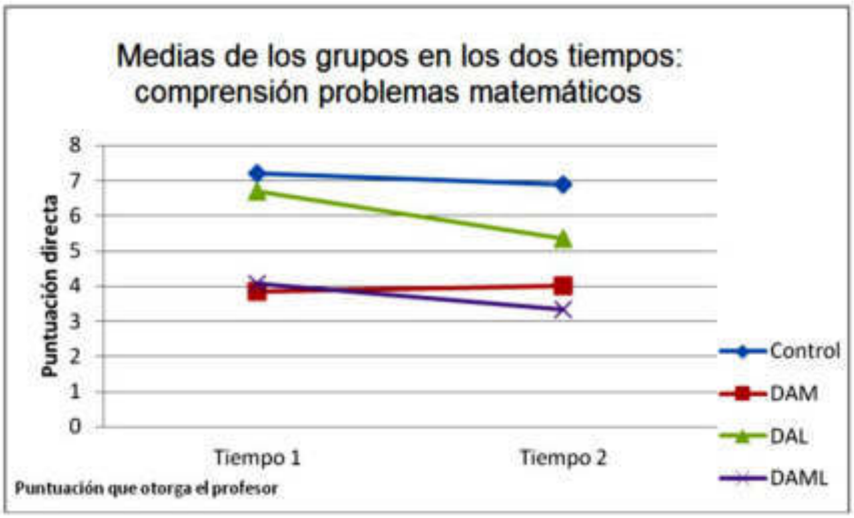


Figura 2. Media de los grupos en los dos tiempos: comprensión problemas matemáticos.

En la figura se muestra que en el tiempo 1 el grupo Control obtuvo mayor puntuación mientras que los grupos DAM y DAML obtuvieron la puntuación más baja. En el tiempo 2 el grupo Control y DAML disminuyeron en una mínima cantidad su puntuación, el grupo DAM mantuvo su puntuación y el grupo DAL disminuyó significativamente su puntuación.

3. Representación de la información de un problema.

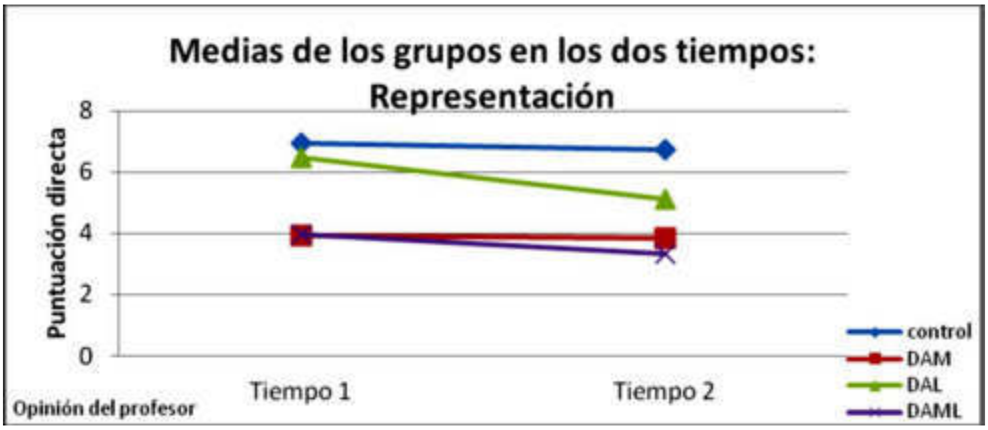


Figura 3. Media de grupos en dos tiempos: Representación de los problemas matemáticos.

En la figura se muestra que en el tiempo 1 el grupo Control obtuvo la mejor puntuación y los grupos DAM y DAML obtuvieron la puntuación más baja. En el tiempo 2 el grupo Control se mantuvo con la mejor puntuación y el grupo DAML obtuvo una puntuación menor a la que obtuvo en el tiempo 1, mientras el grupo DAM mantuvo su puntaje y el grupo DAL disminuyó significativamente en la puntuación.

1.1.2 Pérez, Y., Ramírez, R. (2011). Estrategias de enseñanza de la resolución de problemas matemáticos. Fundamentos teóricos y metodológicos. *Revista de Investigación, 35* (73). Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Venezuela.

OBJETIVO GENERAL

El objetivo de esta investigación es realizar un análisis cualitativo de los fundamentos teóricos de la resolución de problemas matemáticos y las estrategias que se deben emplear para su enseñanza en educación primaria, este estudio se realiza a través de la revisión de fuentes bibliográfica y hemerográficas relacionadas al área.

RESULTADOS

Según Mayer (citado por Poggioli, 1999) los problemas tienen los siguientes componentes: las metas, los datos, las restricciones y los métodos. Sin embargo, Vega Méndez (1992) define una situación – problema como aquella que exige que el que la resuelva use de una manera intensa su actividad cognoscitiva. Es decir, el uso del razonamiento y elaboración de hipótesis, entre otras. Por otro lado, Baroody (1994) señala que es más productivo trabajar en clase con “problemas genuinos”, dado que estos exigen un análisis minucioso para identificar la incógnita, usar los datos necesarios y decidir la estrategia para llegar a la solución. Wallas (citado por Poggioli, 1999) sostiene que para resolver un problema se debe pasar por las siguientes fases: la preparación, que permite analizar el problema; la incubación, donde se analiza el problema de manera inconsciente; la inspiración, que permite vislumbrar la solución de manera inesperada y la verificación, que es la revisión de la solución encontrada.

De acuerdo con Poggioli (1999), las estrategias para resolver problemas se refieren a las operaciones mentales que usan los estudiantes de manera que puedan representar los datos y objetivos, con el propósito de transformarlos y lograr la solución. En tal sentido, las estrategias están constituidas por los métodos heurísticos, los algoritmos y los procesos de pensamiento divergente.

1.1.3 Bahamonte, S., & Vicuña, J. (2011) *Resolución de problemas matemáticos.* Universidad de Magallanes, Chile.

OBJETIVO GENERAL:

Aumentar las capacidades cognitivas de análisis, pensamiento lógico y reflexivo en los estudiantes de primer y tercer año de básica, y de esa manera incrementar su habilidad para resolver problemas en el área de Matemática.

RESULTADOS:

En los cursos de primero y tercero básico se logra un progreso en las capacidades analizadas debido a la realización de acciones pedagógicas orientadas a la resolución de problemas matemáticos.

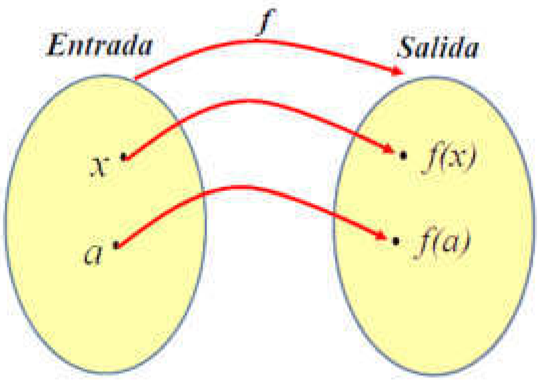
Con respecto a la variable “Comprensión del problema” se obtiene un incremento de logro, en primero básico de 67,7% y en tercero básico de 61,8%. En el indicador “Diferencia los aspectos principales del problema y la respuesta” se obtuvo un logro de 73,3% en primero básico y un 85,7% en tercero básico. En cuanto a el indicador “Interpretar la información adecuada para la resolución de un problema”, en el primero básico hay un incremento de logro de 66,6% y en tercero básico un incremento de 38%. En relación al indicador “Interpretar coherentemente un problema dado”, en el primero básico se aprecia un incremento de 63,3% y en tercero básico de 66,6%. En el indicador “Reconocer la información adecuada para la resolución de la situación problemática”, se tiene un incremento de 76,6% en primero básico y 71,4% en tercero básico. En tanto en el indicador

"Determinar la operativa adecuada para resolver el problema" se obtiene un incremento de logro en un 83,3% en primero básico y de 38% en tercero básico. Y finalmente, en el indicador "Expresar la respuesta", en primero básico se aprecia un incremento de 86,6% mientras que en tercero básico un 57,1%.

1.2 Bases teóricas

1.2.1. Funciones

DEFINICIÓN: Una función es una relación entre dos conjuntos tales que a cada elemento del conjunto de entrada le corresponde exactamente un elemento del conjunto de salida.

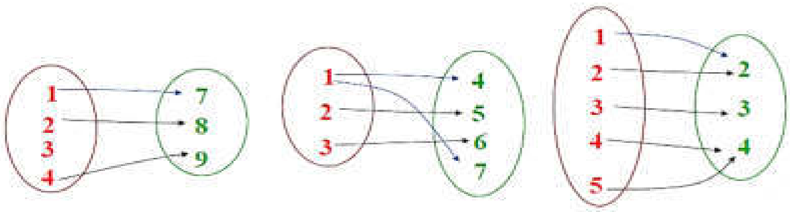


Esto es, si x pertenece al conjunto de entrada e y pertenece al conjunto de salida, diremos que y se expresa como una función de x:

$$y = f(x)$$

Donde x es una variable independiente e y es una variable dependiente.

EJEMPLOS DE FUNCIÓN:



No es función No es función Sí es una función

DOMINIO Y RANGO DE UNA FUNCIÓN:

DOMINIO: Es el conjunto de todos los valores de la variable independiente x para los cuales existe la función.

RANGO: Es el conjunto de todos los valores de la variable dependiente y.

EJEMPLOS:

a) $f(x) = \sqrt{2x-1}$

- Dado que $2x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{1}{2}$, por lo tanto $Dom\ f = \left[\frac{1}{2};\ +\infty\right[$
- Por otro lado $y = f(x) = \sqrt{2x-1}\ \geq 0$.............. (1)

  y despejando x se obtiene: $x = \frac{y^2+1}{2}$, donde y puede tomar cualquier valor real: $y \in \mathbb{R}$...(2)

  Interceptamos (1) y (2): $y \geq 0 \wedge y \in \mathbb{R} \Rightarrow Ran\ f = [0;\ +\infty[$

b) $g(x) = \frac{x-3}{x+1}$

- Dado que $x + 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$, por lo tanto $\mathrm{Dom\ f} = \mathbb{R} - \{-1\}$
- Por otro lado $y = g(x) = \frac{x-3}{x+1}$ y despejando x se obtiene: $x = \frac{-y-3}{y-1}$, donde $y \neq 1 \Rightarrow Ran\ g = \mathbb{R} - \{1\}$

c) $h(x) = \sqrt{\frac{2x-1}{x+2}}$

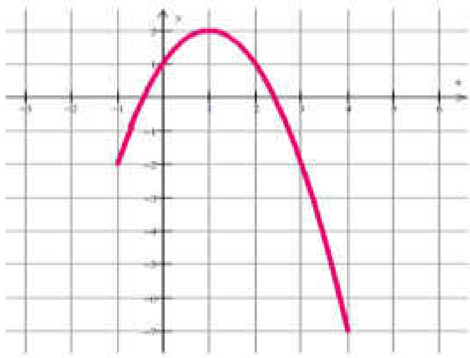
- Dado que $\frac{2x-1}{x+2} \geq 0 \Rightarrow x\epsilon]-\infty;\ -2[\cup \left[\frac{1}{2};\ +\infty\right[$, por lo tanto

  $Dom\ h =]-\infty;\ -2[\cup \left[\frac{1}{2};\ +\infty\right[$

- Por otro lado $y = h(x) = \sqrt{\frac{2x-1}{x+2}} \geq 0$ …………… (1)

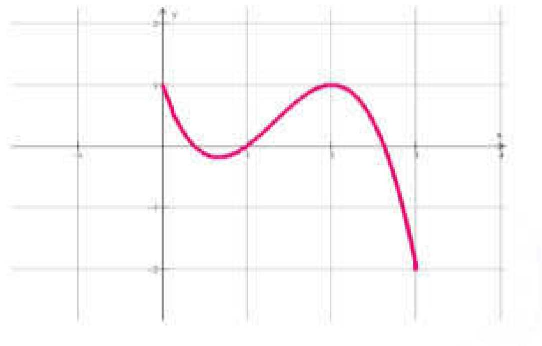
  y despejando x se obtiene: $x = \frac{-2y-1}{y^2-2}$, donde $y \neq \sqrt{2}$ y $y \neq -\sqrt{2}$…(2) Interceptamos (1) y (2): $y \geq 0 \wedge \quad y \neq \sqrt{2} \wedge \quad y \neq -\sqrt{2} \Rightarrow Ran\ f = [0;\ +\infty[- \{\sqrt{2}\}$

d) Determinar el dominio y rango de las siguientes funciones:



$Dominio = [-1; 4]$

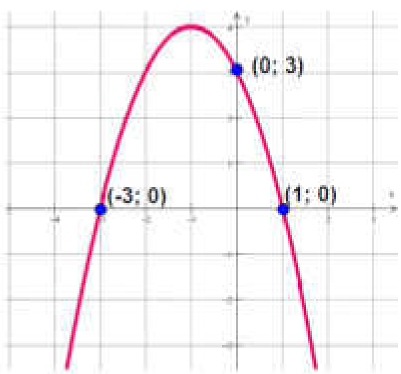
$Rango = [-7; 2]$



$Dominio = [0; 3]$

$Rango = [-2; 1]$

INTERSECCIÓN DE UNA FUNCIÓN CON LOS EJES COORDENADOS:



Intersección con el eje x (abscisas): cuando $y = 0$.

Intersección con el eje y (ordenadas): cuando $x = 0$.

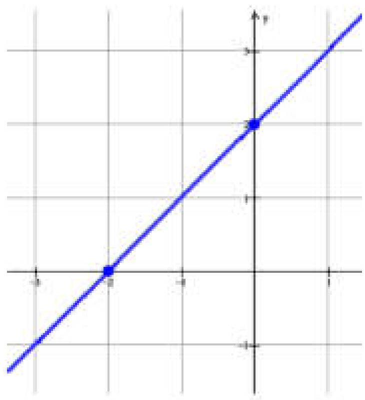
TIPOS DE FUNCIONES:

1) FUNCIÓN LINEAL

Una función lineal es una función de la forma: $y = f(x) = mx + b$, (m y b constantes, m≠0). Su gráfica viene representada por una recta, donde: m es la pendiente de la recta y b es el valor de la ordenada en el origen.

EJEMPLOS:

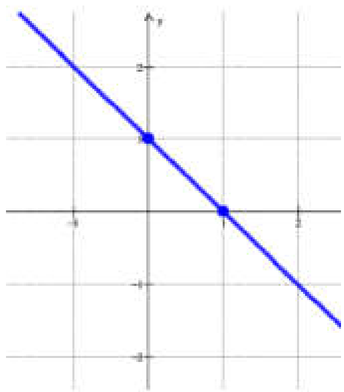
$$f(x) = x + 2$$



$Dom(f) = \mathbb{R}$

$Ran(f) = \mathbb{R}$

$$f(x) = -x + 1$$

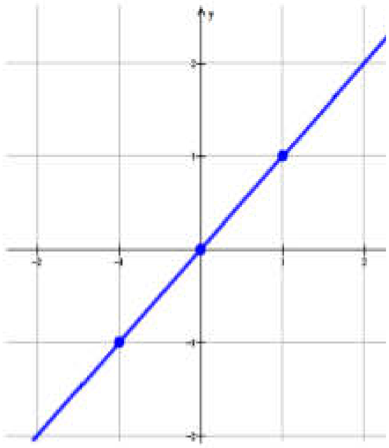


$Dom(f) = \mathbb{R}$

$Ran(f) = \mathbb{R}$

FUNCIÓN IDENTIDAD

$f(x) = x$



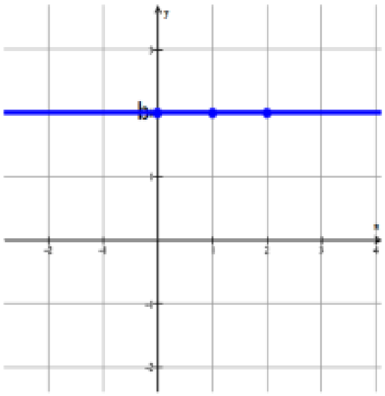
$Dom(f) = \mathbb{R}$

$Ran(f) = \mathbb{R}$

FUNCIÓN

CONSTANTE

$f(x) = b$



$Dom(f) = \mathbb{R}$

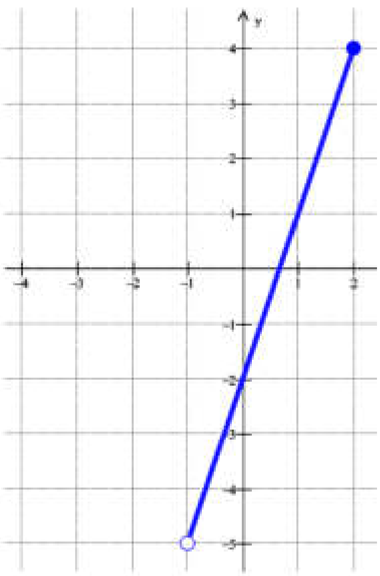
$Ran(f) = b$

FUNCIÓN LINEAL CON

DOMINIO ACOTADO

$f(x) = 3x - 2$

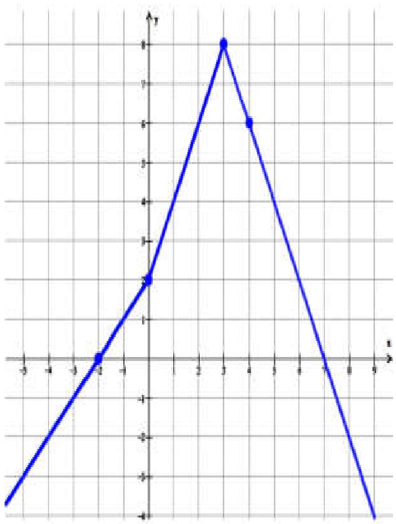
$x\epsilon]-1; 2]$



FUNCIÓN LINEAL CON

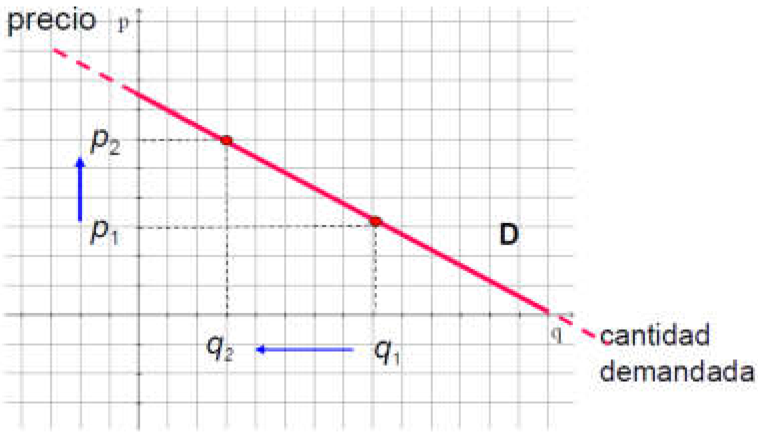
DOMINIO ACOTADO

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & ; si\ x < 0 \\ 2x+2 & ; si\ 0 \le x < 3 \\ -2x+14 & ; si\ x \ge 3 \end{cases}$$

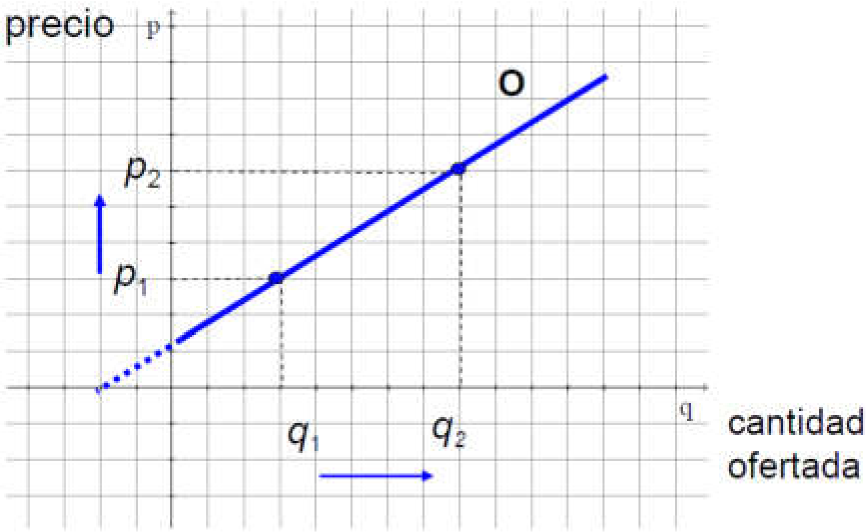


APLICACIONES

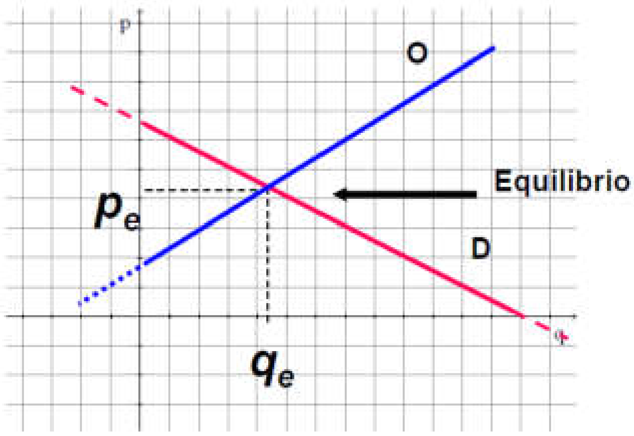
CURVAS DE DEMANDA LINEALES



CURVAS DE OFERTA LINEALES



EQUILIBRIO EN EL MERCADO



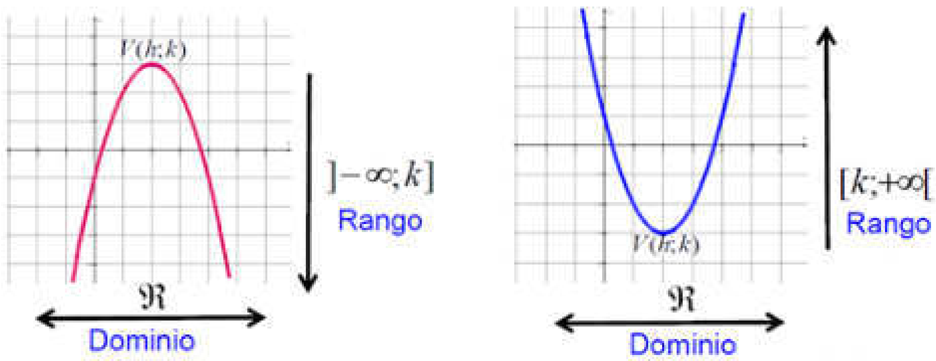
2) FUNCIÓN CUADRÁTICA

Una función cuadrática es una función de la forma:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

donde a, b, c son números reales y $a \neq 0$. Su gráfica es una parábola cuyo eje focal es vertical y su vértice representa un valor máximo o mínimo.

Una función cuadrática tiene como dominio el conjunto $\mathbb{R}$ y como rango un intervalo semiabierto, subconjunto de $\mathbb{R}$, cuyo extremo (máximo o mínimo) está representado por el vértice de la parábola que la describe.



GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN CUADRÁTICA

La función cuadrática:

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

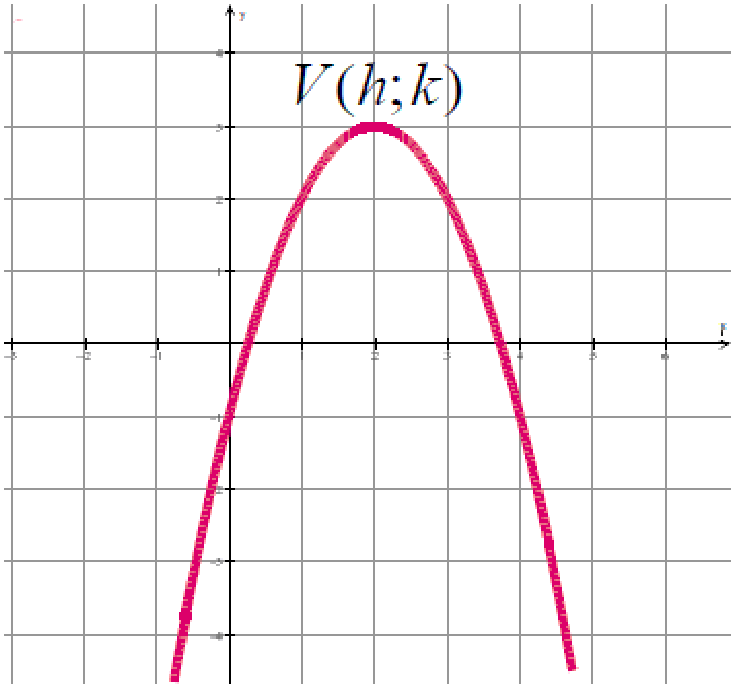
puede ser escrita en su forma estándar: :

$$f(x) = a(x - h)^2 + k$$

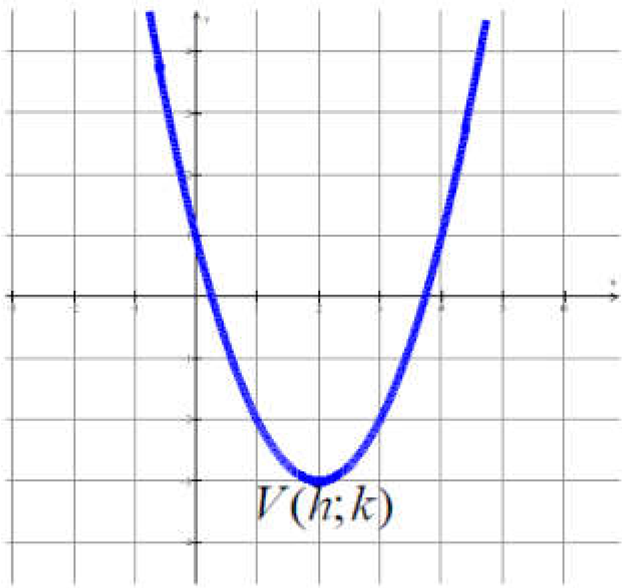
Para elaborar la gráfica, se debe considerar:

- El vértice $(h; k)$.
- Los puntos de intersección con los ejes.
- El signo del coeficiente "a"

El valor máximo o mínimo ocurre en $x = h$



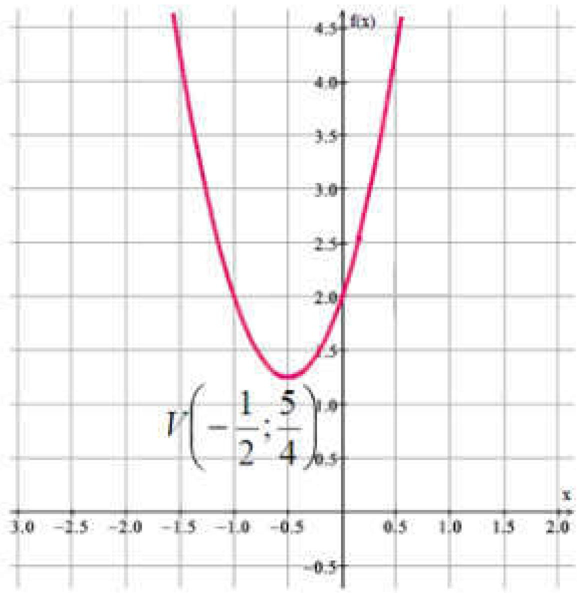
Si $a < 0$ el valor máximo de f es: $f(h) = k$



Si $a > 0$ el valor mínimo de f es: $f(h) = k$

EJEMPLO

Encontrar el valor máximo o mínimo y graficar la función f si: $f(x) = 3x^2 + 3x + 2$.



Completando cuadrados, tenemos:

$$f(x) = 3\left(x^2 + x + \frac{1}{4}\right) + 2 - \frac{3}{4}$$

$$f(x) = 3\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{4};$$

$$h = -\frac{1}{2}, \quad k = \frac{5}{4}, \qquad a = 3 > 0.$$

Entonces el vértice representa un valor mínimo. El vértice es: $V = \left(-\frac{1}{2}; \frac{5}{4}\right)$ y el valor mínimo es: $\frac{5}{4}$

Interceptos:

- Con el eje y: $x = 0$, intercepto: $(0; 2)$.
- Con el eje x: $y = 0$, $0 = 3x^2 + 3x + 2 \Rightarrow C.S. = \phi$, no hay interceptos con el eje x

1.2.2. Límites y continuidad

1) LÍMITE DE UNA FUNCIÓN

DEFINICIÓN:

El límite de $f(x)$ es igual a L cuando x tiende a a, y escribimos:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Es decir, podemos acercar tanto como queramos los valores de $f(x)$ a L, cuando aproximemos x a a, pero sin que x llegue a ser igual a a.

EJEMPLO: Veamos el comportamiento de la función

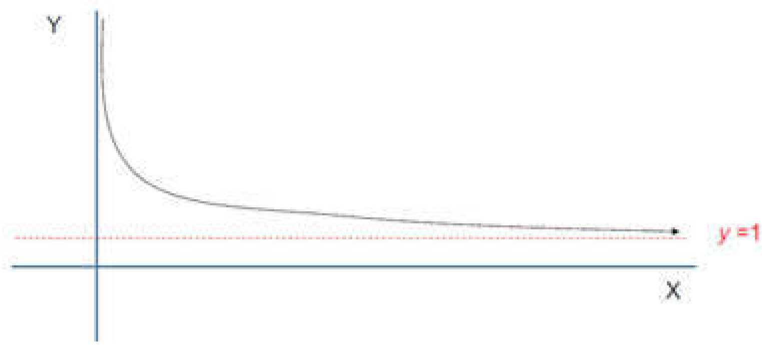
$$f(x) = 1 + \frac{1}{x}; x > 0$$

Colocando en una tabla algunos de sus valores.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f(x)$	2	1,5	1,33333	1,25	1,2	1,16667	1,14286	1,125	1,1111

Observamos que a medida que el valor de x crece, el valor $f(x)$ disminuye y al parecer se acerca al valor 1.

Con una calculadora, evaluemos $f(x)$ para valores muy grandes de x, y notaremos que el valor será prácticamente 1.



En la gráfica de la función f, observamos que a medida que el valor de x crece hacia el infinito, el valor $f(x)$ disminuye y se acerca a 1. Decimos que $f(x)$ TIENDE al valor 1 a medida que x TIENDE al infinito. A este valor 1 lo llamamos LÍMITE.

LÍMITES LATERALES

- LÍMITE LATERAL POR LA IZQUIERDA

DEFINICIÓN: El límite por la izquierda de $f(x)$ es igual a L cuando x tiende a a, y escribimos:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

Es decir, podemos acercar tanto como queramos los valores de $f(x)$ a L, aproximando x a a, siendo x menor que a.

- LÍMITE LATERAL POR LA DERECHA

DEFINICIÓN: El límite por la derecha de $f(x)$ es igual a L cuando x tiende a a, y escribimos:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

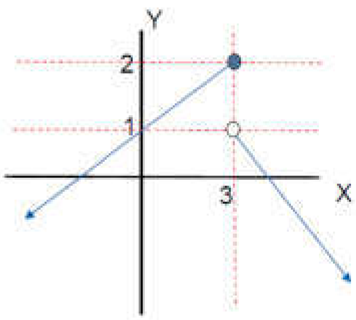
Es decir, podemos acercar tanto como queramos los valores de $f(x)$ a L, aproximando x a a, siendo x mayor que a.

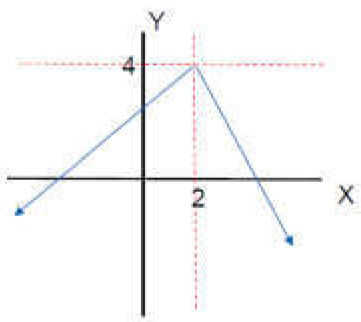
EXISTENCIA DEL LÍMITE DE UNA FUNCIÓN

Se dice que el límite de una función cuando x tiende a "a" existe, si los límites laterales son iguales:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

EJEMPLOS:





$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = 2$$

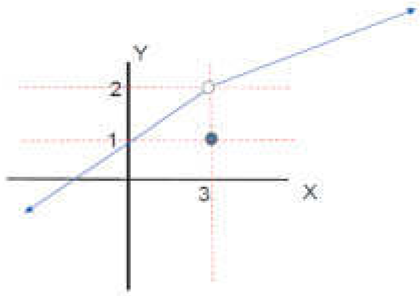
$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = 1$$

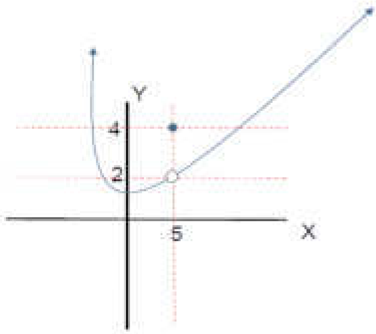
$\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ no existe

$$\lim_{x \to 2^-} g(x) = 4$$

$$\lim_{x \to 2^+} g(x) = 4$$

$$\lim_{x \to 2} g(x) = 4$$





$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = 2$$

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = 2$$

$$\lim_{x \to 3} f(x) = 2$$

$$\lim_{x \to 5^-} g(x) = 2$$

$$\lim_{x \to 5^+} g(x) = 2$$

$$\lim_{x \to 5} g(x) = 2$$

LÍMITES INFINITOS Y LÍMITES AL INFINITO

LÍMITES INFINITOS

DEFINICIÓN: El límite de $f(x)$ es infinito (positivo o negativo) cuando x tiende a a, y escribimos:

$$\lim_{x \to a} f\,(x) = \pm\infty$$

Es decir, podemos incrementar (o disminuir) indefinidamente los valores de $f(x)$, aproximando x a a, pero sin que x llegue a ser igual a a.

LÍMITES INFINITOS POR LA IZQUIERDA

DEFINICIÓN: El límite de $f(x)$ es infinito (positivo o negativo) cuando x tiende a a, y escribimos:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$$

Es decir, podemos incrementar (o disminuir) indefinidamente los valores de $f(x)$, aproximando x a a, siendo x menor que a.

LÍMITES INFINITOS POR LA DERECHA

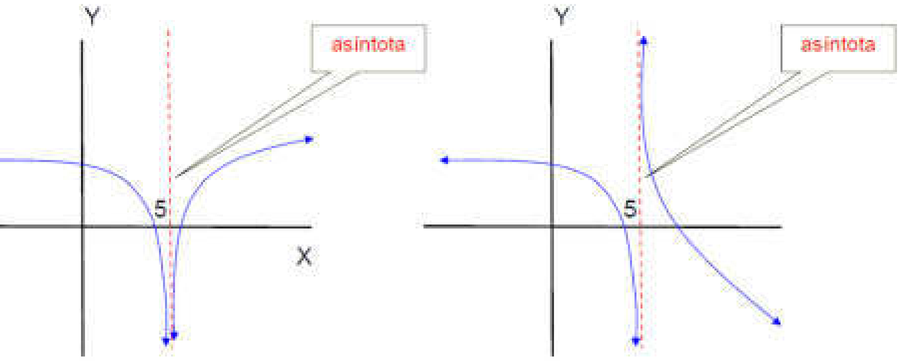
DEFINICIÓN: El límite de $f(x)$ es infinito (positivo o negativo) cuando x tiende a a, y escribimos:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$$

Es decir, podemos incrementar (o disminuir) indefinidamente los valores de $f(x)$, aproximando x a a, siendo x mayor que a.

EJEMPLOS:

a)



$$\lim_{x \to 5^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to 5^-} g(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to 5^+} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to 5^+} g(x) = +\infty$$

b) $\lim_{x \to 3^-} \left(\frac{2}{x-3}\right) = \frac{2}{3^- - 3} = \frac{2}{0^-} = -\infty$

c) $\lim_{x \to 3^+} \left(\frac{2}{x-3}\right) = \frac{2}{3^+ - 3} = \frac{2}{0^+} = +\infty$

d) $\lim_{x \to 3} \left(\frac{2}{x-3}\right)$ no existe, dado que los límites laterales no son iguales a un número.

e) $\lim_{x\to 3^-}\left(\frac{2}{(x-3)^2}\right)=\frac{2}{(3^- -3)^2}=\frac{2}{(0^-)^2}=+\infty$

f) $\lim_{x\to 3^+}\left(\frac{2}{(x-3)^2}\right)=\frac{2}{(3^+ -3)^2}=\frac{2}{(0^+)^2}=+\infty$

g) $\lim_{x\to 3}\left(\frac{2}{(x-3)^2}\right)=+\infty$

LÍMITES AL INFINITO

DEFINICIÓN DE LÍMITE AL INFINITO POR LA IZQUIERDA: Sea f una función definida en un intervalo $]-\infty; a[$. Entonces:

$$\lim_{x\to -\infty} f(x)=L$$

Indica que podemos acercar tanto como queramos los valores de $f(x)$ a L, disminuyendo los valores de x indefinidamente.

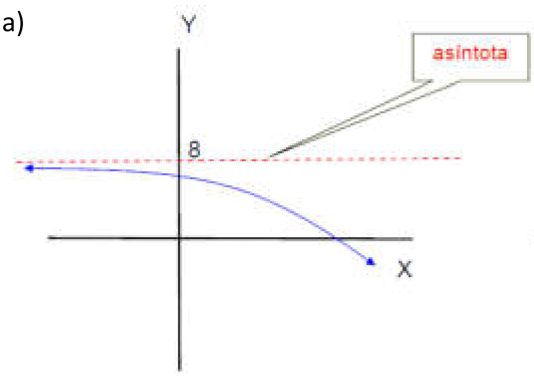
DEFINICIÓN DE LÍMITE AL INFINITO POR LA DERECHA: Sea f una función definida en un intervalo $]a; \infty[$. Entonces:

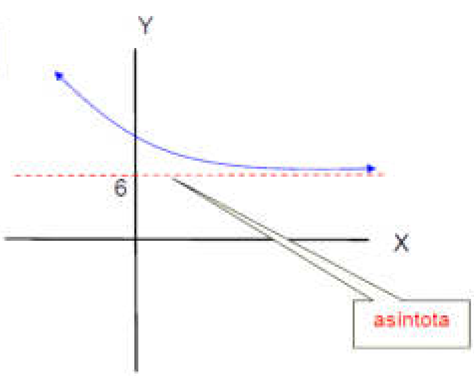
$$\lim_{x\to +\infty} f(x)=L$$

Indica que podemos acercar tanto como queramos los valores de $f(x)$ a L, aumentando los valores de x indefinidamente.

EJEMPLOS:

a)





$\lim_{x\to -\infty} f(x)=8$ $\lim_{x\to +\infty} f(x)=6$

b) $\lim\limits_{x\longrightarrow -\infty}\left(\frac{3x-10}{x-4}\right)=\lim\limits_{x\longrightarrow -\infty}\left(\frac{3\frac{x}{x}-\frac{10}{x}}{\frac{x}{x}-\frac{4}{x}}\right)=\lim\limits_{x\longrightarrow -\infty}\left(\frac{3-\frac{10}{x}}{1-\frac{4}{x}}\right)=\frac{3-0}{1-0}=3$

c) $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty}\left(\frac{3x-10}{x-4}\right)=\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty}\left(\frac{3\frac{x}{x}-\frac{10}{x}}{\frac{x}{x}-\frac{4}{x}}\right)=\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty}\left(\frac{3-\frac{10}{x}}{1-\frac{4}{x}}\right)=\frac{3-0}{1-0}=3$

d) $\lim\limits_{x\longrightarrow -\infty}(1+2^x)=\lim\limits_{x\longrightarrow -\infty}\left(1+\frac{1}{2^{-x}}\right)=1+0=1$

e) $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty}(1+2^x)=(1+\infty)=+\infty$

PROPIEDADES DE LOS LÍMITES

Sean a y k constantes en $\mathbb{R}$, $f(x)$ y $g(x)$ funciones definidas en el conjunto $\mathbb{R}$, tal que existen los siguientes límites: $\lim\limits_{x\longrightarrow a} f(x)$ y $\lim\limits_{x\longrightarrow a} g(x)$, entonces se cumplen las siguientes propiedades:

a) $\lim_{x\to a} K=K$

b) $\lim_{x\to a}(Kf(x))=K\lim_{x\to a} f(x)$

c) $\lim_{x\to a}(f(x)\pm g(x))=\lim_{x\to a} f(x)\pm\lim_{x\to a} g(x)$

d) $\lim_{x\to a}(f(x).\,g(x))=(\lim_{x\to a} f(x)).\,(\lim_{x\to a} g(x))$

e) $\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$, con $\lim_{x\to a} g(x)\neq 0$

f) $\lim_{x\to a}\big(f(x)\big)^n=\left(\lim\limits_{x\to a} f(x)\right)^n$

g) $\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{\lim\limits_{x\to a} f(x)}$

h) $\lim_{x\to a} ln(f(x))=ln(\lim_{x\to a} f(x))$

i) Si $f(x)$ es una función polinómica: $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$

EJEMPLOS:

a) $\lim_{x\to 2}(2x^3-3x^2+4x-5)=2.\,2^3-3.\,2^2+4.2-5=7$

(aplicando la propiedad i)).

b) $\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^3+4x-2}{x^2-2x+2}\right)=\frac{\lim_{x\to 2}(x^3+4x-2)}{\lim_{x\to 2}(x^2-2x+2)}$ (aplicando la propiedad e))

$=\frac{2^3+4.2-2}{2^2-2.2+2}=7$ (aplicando la propiedad i)).

c) $\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^3-x^2-2x}{x^3-3x+2}\right)=\frac{\lim_{x\to 2}(x^3-x^2-2x)}{\lim_{x\to 2}(x^3-3x+2)}$ (aplicando la propiedad e))

$=\frac{2^3-2^2-2.2}{2^3-3.2+2}=0$ (aplicando la propiedad i)).

LÍMITES INDETERMINADOS

Las formas de indeterminación son:

$$\frac{0}{0} \quad \text{ó} \quad \frac{\infty}{\infty}$$

1er caso: $\frac{0}{0}$

Ejemplo 1:

$$A=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x^3-x^2-9x+9}=\frac{0}{0}$$

Se procederá a factorizar para eliminar la indeterminación:

$$A=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x^2-9)}=\lim_{x\to 1}\frac{x+2}{x^2-9}=-\frac{3}{8}$$

Ejemplo 2:

$$B=\lim_{x\to 2}\frac{x-\sqrt{x+2}}{3-\sqrt{4x+1}}=\frac{0}{0}$$

Se procederá a racionalizar para eliminar la indeterminación:

$$B=\lim_{x\to 2}\frac{x-\sqrt{x+2}}{3-\sqrt{4x+1}}.\frac{x+\sqrt{x+2}}{x+\sqrt{x+2}}.\frac{3+\sqrt{4x+1}}{3+\sqrt{4x+1}}$$

$$B=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{9-4x-1}.\frac{3+\sqrt{4x+1}}{x+\sqrt{x+2}}$$

$$B = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+1)}{-4(x-2)} \cdot \frac{3+\sqrt{4x+1}}{x+\sqrt{x+2}}$$

$$B = -\frac{3}{4} \cdot \frac{6}{4} = -\frac{9}{8}$$

<u>2do caso</u>: $\frac{\infty}{\infty}$

Ejemplo 1:

$$C = \lim_{x \to \infty} \frac{2x^2+3x-4}{5x^4-2x^3+3x^2+1} = \frac{\infty}{\infty}$$

Se procederá a dividir numerador y denominador entre x elevado al mayor exponente (en este caso entre x^4) para eliminar la indeterminación:

$$C = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{2x^2+3x-4}{x^4}}{\frac{5x^4-2x^3+3x^2+1}{x^4}} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x^3}-\frac{4}{x^4}}{5-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^4}}$$

$$C = \lim_{x \to \infty} \frac{0+0-0}{5-0+0+0} = \frac{0}{5} = 0$$

Ejemplo 2:

$$D = \lim_{x \to \infty} \frac{3x^2-8x-16}{2x^2-9x+4} = \frac{\infty}{\infty}$$

Se procederá a dividir numerador y denominador entre x elevado al mayor exponente (en este caso entre x^2) para eliminar la indeterminación:

$$D = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{3x^2-8x-16}{x^2}}{\frac{2x^2-9x+4}{x^2}} = \lim_{x \to \infty} \frac{3-\frac{8}{x}-\frac{16}{x^2}}{2-\frac{9}{x}+\frac{4}{x^2}}$$

$$D = \frac{3-0-0}{2-0+0} = \frac{3}{2}$$

2) CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN

DEFINICIÓN: Una función f es continua en a si:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Esta definición se describe más propiamente con estas tres condiciones:

a) Que $f(a)$ esté definida.

b) Que exista $\lim_{x \to a} f(x)$

c) Que se cumpla $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

EJEMPLOS:

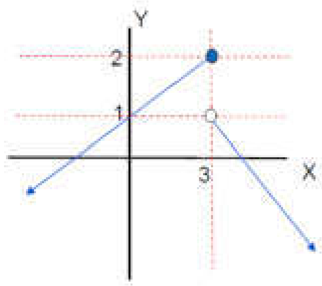
a) $f(x) = \frac{x^2+3x-7}{x-2}$ no es continua en $x = 2$, dado que no está definida $f(2)$.

b) $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}; si\ x \neq 0 \\ 1\ ; si\ x = 0 \end{cases}$ es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$, dado que $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$, esto es, este límite no existe.

c) $h(x) = \begin{cases} \frac{x^2-x-2}{x-2}; si\ x = 2 \\ \quad 1 \quad ; si\ x \neq 2 \end{cases}$ es continua en $\mathbb{R} - \{2\}$, dado que no está definida $h(2)$.

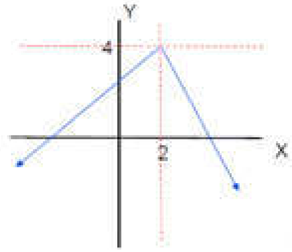
EJEMPLOS GRÁFICOS:

a)



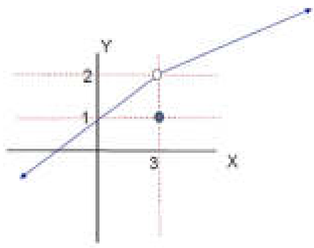
Dado que $\lim_{x \to 3} f(x)$ no existe, f es discontinua en $x = 3$.

b)



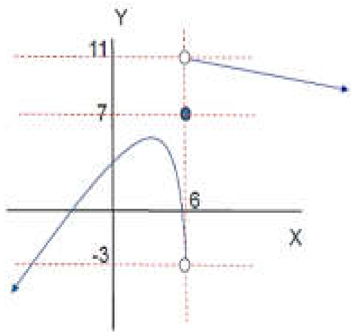
La función es continua en todo su dominio.

c)



Dado que $\lim_{x\to 3} f(x) \neq f(3)$, la función no es continua en $x = 3$

d)



Dado que $\lim_{x\to 6} f(x)$ no existe, la función no es continua en $x = 6$

TIPOS DE DISCONTINUIDAD:

a) DISCONTINUIDAD REMOVIBLE O EVITABLE:

Para esta discontinuidad se presentan dos casos:

- Cuando existen $\lim_{x\to a} f(x)$ y $f(a)$ pero $\lim_{x\to a} f(x) \neq f(a)$.
- O cuando existe $\lim_{x\to a} f(x)$ pero no existe $f(a)$

Ejemplo:

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x - 2}$$

Analicemos la continuidad de la función en $x = 2$:

$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-x-2}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+1)}{x-2} = \lim_{x\to 2}(x+1) = 3.$

Entonces, existe $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-x-2}{x-2}$ pero no existe $f(2)$. Por lo tanto, la función f presenta una discontinuidad evitable en $x = 2$.

b) DISCONTINUIDAD NO EVITABLE:

- Discontinuidad no evitable de tipo salto finito: Cuando existe $\lim_{x\to a^-} f(x)$ y $\lim_{x\to a^+} f(x)$ pero $\lim_{x\to a^-} f(x) \neq \lim_{x\to a^+} f(x)$.

  Ejemplo:

  $$f(x) = \begin{cases} 2x - 2; si\ x \leq 3 \\ 2 - x; si\ x > 3 \end{cases}$$

  Analicemos la continuidad de la función en $x = 3$:

  $\lim_{x\to 3^-} 2x - 2 = 4$ y $\lim_{x\to 3^+} 2 - x = -1$ pero $\lim_{x\to 3^-} f(x) \neq \lim_{x\to 3^+} f(x)$. Por lo tanto, la función presenta discontinuidad no evitable de tipo salto finito en $x = 3$.

- Discontinuidad no evitable de tipo salto infinito: Cuando existe $\lim_{x\to a^-} f(x)$ y $\lim_{x\to a^+} f(x)$ es infinito o cuando existe $\lim_{x\to a^+} f(x)$ y $\lim_{x\to a^-} f(x)$ es infinito.

  Ejemplo:

  $$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}; si\ x < 0 \\ x; si\ x \geq 0 \end{cases}$$

  Analicemos la continuidad de la función en $x = 0$:

  $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ y $\lim_{x\to 0^+} x = 0$. Por lo tanto, la función presenta discontinuidad no evitable de tipo salto infinito en $x = 0$.

- Discontinuidad no evitable de tipo asintótica: Cuando $\lim_{x\to a^-} f(x)$ y $\lim_{x\to a^+} f(x)$ son infinitos.

  Ejemplo:

$$f(x) = \frac{1}{x-2}$$

  Analicemos la continuidad de la función en $x = 2$:

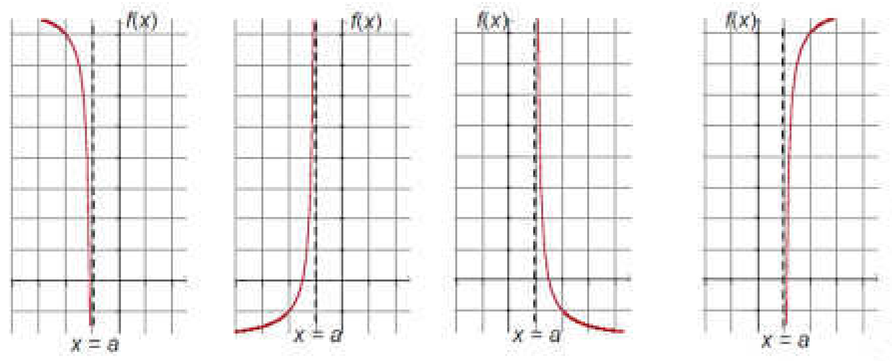
  $\lim_{x\to 2^-} \frac{1}{x-2} = \frac{1}{0^-} = -\infty$ y $\lim_{x\to 2^+} \frac{1}{x-2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$. Por lo tanto la función presenta discontinuidad no evitable de tipo asintótica en $x = 2$.

1.2.3. Asíntotas y función racional.

1) ASÍNTOTAS DE UNA FUNCIÓN

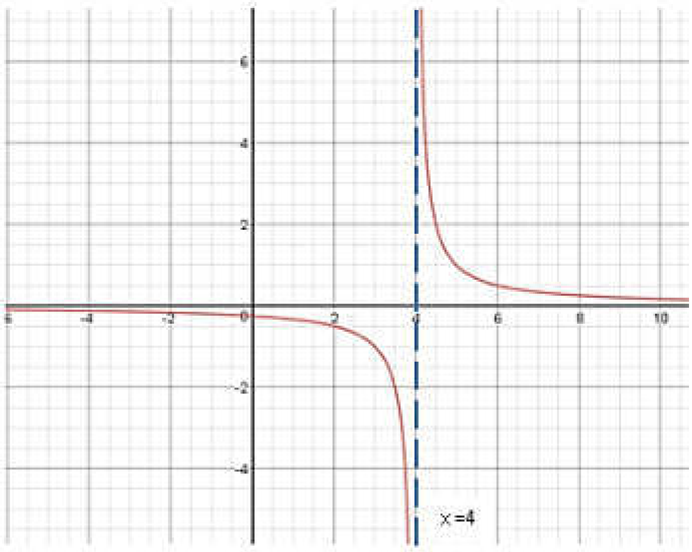
a) ASÍNTOTA VERTICAL: La recta $x = a$, con a $\in \mathbb{R}$, es una asíntota vertical de la función $f(x)$ si:

$$\lim_{x\longrightarrow a^-} f(x) = \pm\,\infty \text{ o } \lim_{x\longrightarrow a^+} f(x) = \pm\,\infty$$



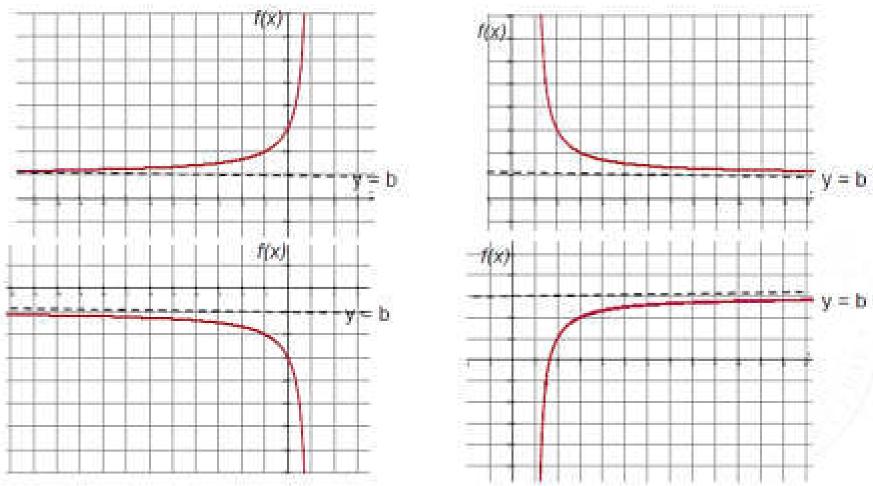
Ejemplo: $f(x) = \frac{1}{x-4}$

Dado que, $\lim_{x\longrightarrow 4^-} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\,\infty$ y $\lim_{x\longrightarrow 4^+} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\,\infty$, entonces la recta $x = 4$ es una asíntota vertical como se puede observar en el siguiente gráfico:



b) ASÍNTOTA HORIZONTAL: La recta $y = b$, con $b \in \mathbb{R}$, es una asíntota horizontal de la función $f(x)$ si:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = b \text{ o } \lim_{x\to+\infty} f(x) = b$$

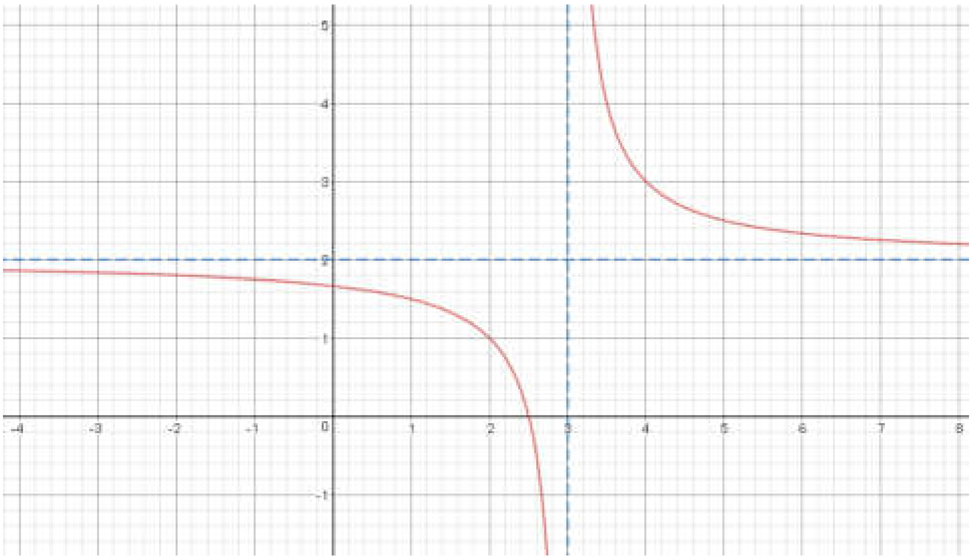


Ejemplo:

$$f(x) = \frac{2x-5}{x-3}$$

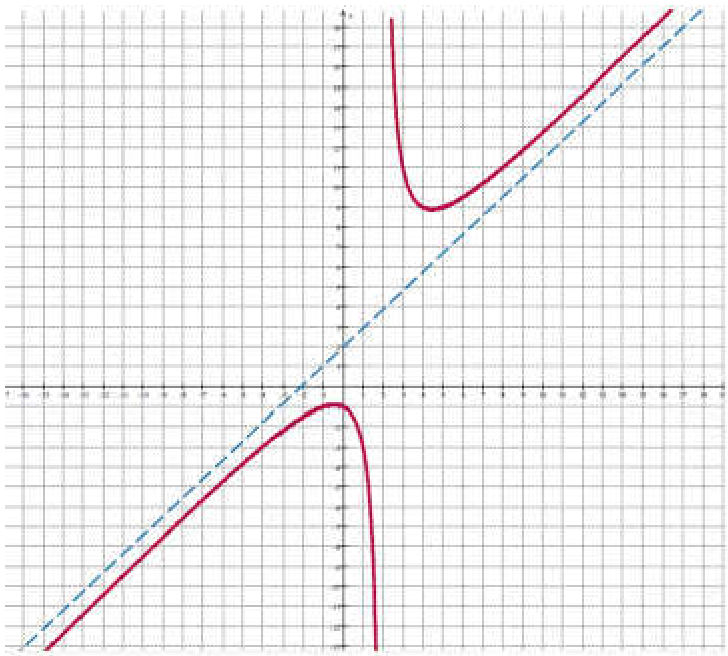
Dado que $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x-5}{x-3} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2-\frac{5}{x}}{1-\frac{3}{x}} = \frac{2-0}{1-0} = 2$, entonces la recta $y = 2$ es una asíntota horizontal.

Si añadimos que $\lim_{x \to 3^-} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty$ y $\lim_{x \to 3^+} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$, entonces la recta $x = 3$ es una asíntota vertical. Por lo tanto el gráfico es el siguiente con asíntotas $x = 3$ y $y = 2$:



c) ASÍNTOTA OBLICUA: La recta $y = mx + b$, con $m, b \in \mathbb{R}$, es una asíntota oblicua de la función $f(x)$ si:

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ y } b = \lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - mx]$$



Ejemplo:

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x}{x - 3}$$

Hallamos la recta $y = mx + b$:

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\frac{x^2 + 2x}{x - 3}}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 + 2x}{x(x - 3)}$$

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 + 2x}{x^2 - 3x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1 + \frac{2}{x}}{1 - \frac{3}{x}} = \frac{1 - 0}{1 - 0} = 1$$

Por otro lado:

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} \left[\frac{x^2 + 2x}{x - 3} - x\right] = \lim_{x \to \pm\infty} \left[\frac{x^2 + 2x - x^2 + 3x}{x - 3}\right]$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \left[\frac{5x}{x - 3}\right] = \lim_{x \to \pm\infty} \left[\frac{5}{1 - \frac{3}{x}}\right] = \frac{5}{1 - 0} = 5$$

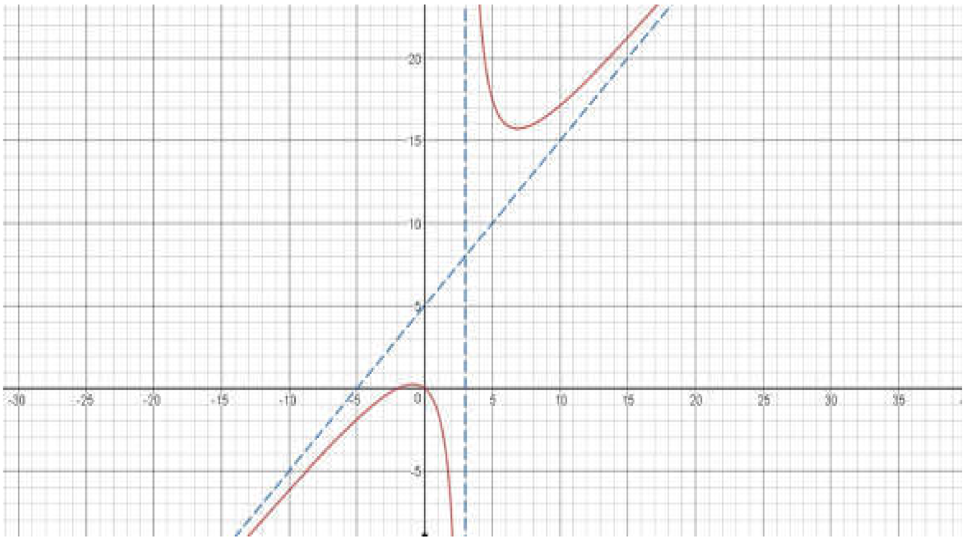
Por lo tanto la asíntota oblicua es la recta: $y = x + 5$.

Notamos además, que hay una asíntota vertical:

$\lim_{x \to 3^+} \frac{x^2+2x}{x-3} = \frac{14}{0^+} = +\infty$ y $\lim_{x \to 3^-} \frac{x^2+2x}{x-3} = \frac{14}{0^-} = -\infty$, entonces la asíntota vertical es la recta $x = 3$.

Se observa que está función no tiene asíntota horizontal, dado que: $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+2x}{x-3} = +\infty$ y $\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2+2x}{x-3} = -\infty$.

En el siguiente gráfico se muestran las asíntotas $y = x + 5$ y $x = 3$, junto con las curvas que representan la función



2) FUNCIÓN RACIONAL

La función racional está definida como el cociente de dos polinomios:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

$$Dom(f) = \mathbb{R} - \{x/Q(x) = 0\}$$

Ejemplo:

$$f(x) = \frac{3x - 2}{x + 1}$$

Para graficar esta función, primero hallamos sus asíntotas:

- Asíntota vertical: $x = -1$

  $\lim_{x\to -1^+} \frac{3x-2}{x+1} = \frac{-5}{0^+} = -\infty$ y $\lim_{x\to -1^-} \frac{3x-2}{x+1} = \frac{-5}{0^-} = +\infty$.

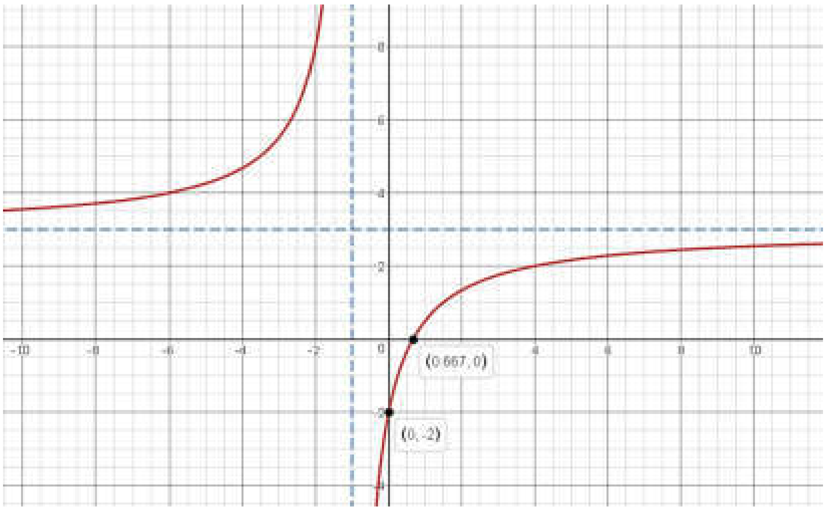
- Asíntota horizontal: $y = 3$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x - 2}{x + 1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3 - \frac{2}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{3 - 0}{1 - 0} = 3$$

- No tiene asíntota Oblicua.
- Ahora veamos los interceptos con los ejes coordenados:

x	0	$\frac{2}{3}$
$f(x)$	-2	0

- El gráfico correspondiente es el que sigue, mostrando sus asíntotas: $x = -1$ y $y = 3$, y los interceptos: $(0; -2)$ y $(\frac{2}{3}; 0)$



1.2.4. Capacidades procedimentales

Las capacidades procedimentales representan el conjunto de destrezas y estrategias para dar solución a situaciones problemáticas (Sevilla, 1994; Duggan y Gott, 1995). Se entiende por destrezas a la aptitud, pericia o habilidad para desempeñar una acción individual específica (observar, clasificar, comparar, etc.) y por estrategias a los procesos mentales complejos (descubrir regularidades, emitir hipótesis razonables, distinguir entre variables dependientes e independientes, etc.). Unas y otras constituyen el conjunto de habilidades que permiten a los estudiantes dar solución a problemas prácticos desde sus propios recursos, sin recetas de un guión ni indicaciones del profesor. Estas capacidades procedimentales *se* pueden interpretar como acciones ordenadas y orientadas a la consecución de una meta. Dichas capacidades requieren de reiteración de acciones que lleven a los alumnos a dominar la técnica, habilidad o estrategia que son el objeto de aprendizaje.

No todos los procedimientos presentan la misma dificultad para lograr adquisición y dominio. Algunos son más sencillos que otros por lo que el tiempo de adquisición varía.

Hay capacidades procedimentales:

- **Generales**. Comunes a todas las áreas que se pueden agrupar en:
  - Procedimientos para la búsqueda de información.
  - Procedimientos para procesar la información obtenida (análisis, realización de tablas, gráficas, clasificaciones etc.)
  - Procedimientos para la comunicación de información (elaboración de informes, exposiciones, puestas en común, debates etc.)
- **Algorítmicos**. Indican el orden y el número de pasos que han de realizarse para resolver un problema. Siempre que se realicen los pasos previstos y en el orden adecuado, los resultados serán idénticos (por ejemplo, copiar, sacar el área de una figura.)
- **Heurísticos**. Son contextuales, es decir, no aplicables de manera automática y siempre de la misma forma (a diferencia de los algorítmicos) a la solución de un problema. (Ejemplo: la interpretación de textos)

Para elegir el tipo de capacidades procedimentales a usar, hay que preguntarse:

- ¿Qué objetivos procedimentales se quieren incluir?

- ¿Qué tipo de requisitos de aprendizaje implica lo seleccionado?
- ¿En qué lugar del recorrido de ese procedimiento se encuentran los alumnos?
- ¿Qué tipo de adecuaciones tengo que hacer con base en lo anterior?
- Redactarlos incluyendo el sustantivo (contenido conceptual).

Para aprender una capacidad procedimental son necesarias:

1. la ejecución de un conjunto de acciones ordenadas
2. la ejercitación abundante y variada
3. la aplicación en contextos diferenciados
4. la reflexión del educando sobre su propio accionar
5. la evaluación de los pasos dados y de los resultados obtenidos

1.2.5. La resolución de problemas

Estas consideraciones pedagógicas pueden aplicarse con especial privilegio a partir de una estrategia basada en la resolución de problemas, la que se ha convertido desde hace algunas décadas en una importante contribución a la Educación Matemática en el mundo. Tal vez, la obra de Pólya, que aunque escrita en los años 40 del siglo XX, fue traducida a otras lenguas hasta los años 60 y 70, fue la pionera en este tipo de propuestas. El planteó una sucesión de pasos en la resolución de problemas: entender el problema, configurar un plan, ejecutar el plan, mirar hacia atrás y un conjunto de “mandamientos” para profesores, como los siguientes:

a) Interésese en su materia.
b) Conozca su materia.

c) Trate de leer las caras de sus estudiantes; trate de ver sus expectativas y dificultades; póngase usted mismo en el lugar de ellos.
d) Dése cuenta que la mejor manera de aprender algo es descubriéndolo por uno mismo.
e) Dé a sus estudiantes no sólo información, sino el conocimiento de cómo hacerlo, promueva actitudes mentales y el hábito del trabajo metódico.
f) Permítales aprender a conjeturar.
g) Permítales aprender a comprobar.
h) Advierta que los rasgos del problema que tiene a la mano pueden ser útiles en la solución de problemas futuros: trate de sacar a flote el patrón general que yace bajo la presente situación concreta.
i) No muestre todo el secreto a la primera: deje que sus estudiantes hagan sus conjeturas antes; déjelos encontrar por ellos mismos tanto como sea posible.
j) Sugiérales; no haga que lo aprendan a la fuerza.

En el año 1966 el International Committee of Mathematical Instruction, ICMI, realizó una encuesta en varios países sobre el papel de los problemas en la actividad matemática escolar. Algunos años después, en los años 70 y 80 del pasado siglo, se desarrollaron importantes investigaciones sobre la resolución de problemas: Kilpatrick, Lester, Goulding, Glasier, Schoenfeld y muchos otros. En el año de 1980, la cuarta reunión internacional IV-ICMI, celebrada en Berkeley-EUA, tuvo un grupo de trabajo dedicado a la resolución de problemas y de allí en adelante ha sido un tema central en la Educación Matemática internacional. Un ejemplo relevante del papel de este tópico se puede apreciar con el documento Agenda for action (1980) del Nacional Council of Teachers of Matemáticas, NCTM, de los EUA, que colocaba la resolución de problemas como el foco de la Educación Matemática en la década de los 80 para ese país. En el año 1989 y luego, en el 2000, esta organización poderosa ha propuesto el tema con igual intensidad (por medio de sus Estándares). Se trata entonces de un asunto presente en la Educación matemática desde hace varias décadas, sin embargo, no se ha introducido en la currícula de los países con igual intensidad, e incluso en aquellos en los que se ha dado ha sido muy recientemente. La resolución de problemas, como señalamos arriba, obedece a una comprensión tanto de la educación matemática como de la naturaleza de las matemáticas. Con Pólya: "Para un matemático, que es activo en la investigación, la matemática puede aparecer algunas veces como un juego de imaginación: hay que imaginar un teorema matemático antes de probarlo; hay que imaginar la idea de la prueba antes de ponerla en práctica. Los aspectos matemáticos son primero imaginados y luego probados, y casi todos los pasajes de este libro están destinados a mostrar que éste es el procedimiento normal. Si el aprendizaje de la matemática tiene algo que ver con el descubrimiento en matemática, a los estudiantes se les debe brindar alguna oportunidad de resolver problemas en los que primero imaginen y luego prueben alguna cuestión matemática adecuada a su nivel." (Pólya, 1954 –citado por Vilanova et al 2001). Es así que se concluye que el corazón de la práctica matemática reside en la formulación y resolución de problemas. En ese proceso, por supuesto, intervienen factores diversos, que van desde las motivaciones psicológicas y culturales, hasta vectores de naturaleza social e histórica más amplia. El punto es, que si en las matemáticas y su aprendizaje la resolución de problemas posee una dimensión estratégica, la lección debe concebirse en buena parte a partir de la misma. Es decir, la resolución de problemas como metodología en la clase debe ocupar un lugar predominante. Y esto no es lo más común en la enseñanza de las matemáticas en los diversos países. Aunque varias estrategias pedagógicas diferentes a la resolución de problemas pueden propiciar resultados positivos en el aprendizaje, es importante subrayar la resolución de problemas como un instrumento privilegiado (a potenciar e interpretar apropiadamente) en los planes de la Educación Matemática.

1.3 Definición de términos básicos

- **Los conceptos fundamentales del cálculo:** Son el conjunto de definiciones que corresponden al cálculo, el cual es una rama de la matemática que se encarga de formalizar determinados conceptos matemáticos. El cálculo se divide en diferentes tipos: algebraico, aritmético, diferencial, integral, entre otros.
- **Función:** se refiere a una regla que asigna a cada elemento de un primer conjunto un único elemento de un segundo conjunto.
- **Límite y continuidad:** El límite de una función es el valor hacia el que se dirige una función en un determinado punto o en el infinito. Para la

existencia del límite de una función en un punto “a” no importa que la función esté o no definida en ese punto, lo que importa son los valores que toma la función en un entorno de ese punto “a”. Existirá el límite, y su valor será “L”, cuando todos los puntos próximos a “a” se transforman, mediante, la función en puntos próximos a “L”. Esto es, si “x” está cerca de “a”, entonces f(x) está cerca de L. Esto se representa así:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Una función f (x) es continua en el punto x = a, si el límite de la función f(x) cuando x tiende a “a” existe, f(a) existe y se cumple lo siguiente:

$$\lim_{x \to a} \mathrm{f}\,(\mathrm{x}) = \mathrm{f}\,(\mathrm{a})$$

- **Asíntota:** se le llama asíntota de la gráfica de una función a una recta a la que se aproxima continuamente la gráfica de tal función; es decir; que la distancia entre las dos tiende a ser cero, a medida que se extienden indefinidamente.

  O que ambas presentan un comportamiento asintótico. Generalmente, las funciones racionales tienen comportamiento asintótico.

- **Capacidades procedimentales para resolver problemas:** Constituyen un conjunto de acciones que facilitan el logro de la resolución de problemas. El estudiante será el actor principal en la realización de los procedimientos que demandan los contenidos, es decir, desarrollará su capacidad para “saber hacer”. En otras palabras contemplan el conocimiento de cómo ejecutar acciones interiorizadas. Estos contenidos abarcan habilidades intelectuales, motrices, destrezas, estrategias y procesos que le permitirán al estudiante resolver los problemas en cuestión. Los procedimientos aparecen en forma secuencial y sistemática. Requieren de reiteración de acciones que llevan a los estudiantes a dominar la técnica o habilidad.

- **La capacidad de cálculo:** es la habilidad para acceder, utilizar, interpretar y comunicar información matemática e ideas para involucrase y poder gestionar las demandas matemáticas que se presentan en ciertas situaciones de la vida adulta. Esta es una competencia fundamental en una época en la cual los individuos encuentran cada vez mayor información cuantitativa y matemática en la vida cotidiana. Es además una competencia paralela a la lectura y es importante evaluar cómo interactúan estas dos competencias, ya que se distribuyen diferentemente en subgrupos de la población.
- **La capacidad de análisis**: El análisis es el método de investigación o proceso consistente en dividir cada una de las dificultades que encontramos en tantas partes como se pueda, hasta llegar a los elementos más simples. La capacidad de análisis está relacionada con todo aquello que nos permite extraer conclusiones y previsiones para el futuro, como resultado de relacionar datos recogidos del presente y extrapolarlos con los del pasado.
- **La capacidad de interpretar**: Esta capacidad es el hecho de que un contenido material dado sea “comprendido” o “traducido” a una nueva forma de expresión. Dicho concepto está muy relacionado con la hermenéutica. Cognitivamente la capacidad de interpretación consiste en reconstruir la realidad material a la que se refiere una representación de la realidad.

CAPÍTULO II: HIPÓTESIS Y VARIABLES

2.1 Hipótesis principal

Los conceptos fundamentales del cálculo se relacionan significativamente con el desarrollo de capacidades procedimentales en la resolución de problemas de alumnos universitarios.

2.2 Hipótesis derivadas

- ✓ Los conceptos fundamentales del cálculo se relacionan significativamente con el desarrollo de la capacidad procedimental para calcular en la resolución de problemas de alumnos universitarios.
- ✓ Los conceptos fundamentales del cálculo se relacionan significativamente con el desarrollo de la capacidad procedimental para analizar en la resolución de problemas de alumnos universitarios.
- ✓ Los conceptos fundamentales del cálculo se relacionan significativamente con el desarrollo de la capacidad procedimental para interpretar en la resolución de problemas de alumnos universitarios.

2.3 Variables y definición operacional

Matriz de Operacionalización de las Variables

VARIABLES	DEFINICIÓN DE VARIABLES	DIMENSIONES	INDICADORES	ITEMS	INSTRUMENTO
CONCEPTOS FUNDAMENTALES DEL CÁLCULO	Son el conjunto de definiciones que corresponden al cálculo	FUNCIÓN	➢ Definición de función. ➢ Dominio y rango de una función. ➢ Intersecciones con ejes coordenados. ➢ Función constante, función lineal. ➢ Función cuadrática.	➢ Identifique el dominio y rango de una función dada. ➢ Identifique en una gráfica los interceptos con los ejes coordenados. ➢ Grafique una función constante, una lineal y una cuadrática.	Prueba de evaluación
		LÍMITE Y CONTINUIDAD	➢ Definición de límite y límites laterales. ➢ Límites infinitos y límites al infinito. ➢ Propiedades de los límites. ➢ Límites indeterminados. ➢ Continuidad de una función, tipos de discontinuidad.	➢ Gráficamente exprese la idea de límites infinitos y límites al infinito. ➢ Aplique 3 propiedades de límites. ➢ Reconozca en un ejemplo de límite el límite indeterminado. ➢ A través de un ejemplo identifique un tipo de discontinuidad.	
		ASÍNTOTAS Y FUNCIÓN RACIONAL	➢ Asíntota vertical. ➢ Asíntota Horizontal. ➢ Asíntota Oblicua. ➢ Función racional. ➢ Ejemplo de función racional.	➢ Mediante un ejemplo identifique la asíntota vertical y oblicua. ➢ De un ejemplo de función racional. ➢ Grafique una función racional.	
		CÁLCULO	➢ Definición de límite y límites laterales. ➢ Intersecciones con ejes coordenados. ➢ Asíntota vertical. ➢ Asíntota Horizontal. ➢ Asíntota Oblicua.	➢ Determinar el valor de los siguientes límites: (i) $\lim_{x\to e}\frac{x-e}{x^2-e^2}$ (ii) $\lim_{x\to 0}\frac{x-e}{x^2-e^2}$ (iii) $\lim_{x\to +\infty}\frac{x-e}{x^2-e^2}$ ➢ Determine todas las asíntotas e interceptos con los ejes coordenados de la función $f(x)=\frac{x^2}{x-1}$. ➢ Calcule $\lim_{x\to 1} f(x)$ y $\lim_{x\to 4} f(x)$, de la función $f(x)=\begin{cases} 2x-1\,; x<1 \\ -x^2+4x-2\,; 1<x\leq 4 \\ -3\,; x>4 \end{cases}$	

DESARROLLO DE CAPACIDADES PROCEDIMENTALES PARA RESOLVER PROBLEMAS	Es el proceso a través del cual se fortalecen o mantienen un conjunto de habilidades que facilitan el logro de la resolución de problemas.	ANÁLISIS	➢ Definición de límite y límites laterales. ➢ Límites infinitos y límites al infinito. ➢ Límites indeterminados. ➢ Asíntota s ➢ Función racional.	➢ Trace la gráfica dela siguiente función: $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$ ➢ Sea f una función definida por $f(x) = \begin{cases} 2x-1\,; x<1 \\ -x^2+4x-2\,; 1<x\leq 4 \\ -3\,; x>4 \end{cases}$ Trace la gráfica de f. ➢ Grafique una función f cuyo dominio sea $\mathbb{R} - \{2;3\}$ y que cumpla con las siguientes condiciones: • $lim_{x\to 2^-} f(x) = lim_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$ • $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 2$ • $f(x) = (x-4)^2 + 1, x > 3$ • $\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -2^+} f(x) = -2$ • $f(-4) = f(-2) = f(0) = 0$ • $\lim_{x\to 3} f(x) = 2$ Indique el rango de f. ➢ La oferta de cierto artículo se encuentra modelada por la función racional: $p = \frac{Aq+6}{Bq+2}$, donde A y B son valores constantes, p representa el precio en dólares por artículo y q representa las unidades ofrecidas (en cientos). Por limitaciones del mercado se espera que al ofrecer la mayor cantidad de artículos el precio tienda a un valor máximo de $7,50. .Haga un esbozo de la gráfica de la función racional y resalte el tramo que corresponde a la oferta.	Prueba de evaluación
		INTERPRETACIÓN	➢ Límites infinitos y límites al infinito. ➢ Continuidad de una función, tipos de discontinuidad. ➢ Asíntota vertical. ➢ Asíntota Horizontal. ➢ Función racional.	➢ ¿En qué valores presenta discontinuidades la función f? Clasifíquelas. Siendo: $f(x) = \begin{cases} 2x-1\,; x<1 \\ -x^2+4x-2\,; 1<x\leq 4 \\ -3\,; x>4 \end{cases}$ Redefina la función $f(x) = \begin{cases} 2x-1\,; x<1 \\ -x^2+4x-2\,; 1<x\leq 4 \\ -3\,; x>4 \end{cases}$ en donde sea posible, para que f sea continua. ➢ La oferta de cierto artículo se encuentra modelada por la función racional: $p = \frac{Aq+6}{Bq+2}$, donde A y B son valores constantes, p representa el precio en dólares por artículo y q representa las unidades ofrecidas (en cientos). Por limitaciones del mercado se espera que al ofrecer la mayor cantidad de artículos el precio tienda a un valor máximo de $7,50. Determine los valores de las constantes A y B si al precio de $6,75 se ofrecen 500 artículos.	

CAPÍTULO III: METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

3.1 Diseño metodológico

Este trabajo de investigación es de:

Enfoque: cuantitativo.

Diseño: No experimental

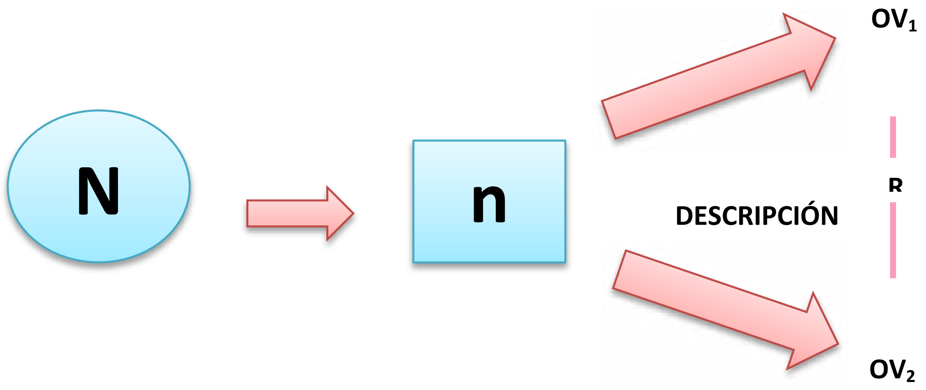
De un nivel descriptivo, correlacional

Corte transversal

3.2 Diseño muestral

En esta tesis se seleccionó una población o universo de 495 estudiantes de diferentes carreras de la universidad ESAN que estudian la asignatura de Cálculo I, correspondiente al segundo ciclo. Para seleccionar la muestra se empleó la siguiente fórmula:

$$n = \frac{(Z)^2 pqN}{(N-1)e^2 + Z^2 pq}$$



Donde:

N: Universo.

e: error.

Z: correspondiente al nivel de confianza.

p: Probabilidad de éxito.

q: Probabilidad de fracaso.

n: Muestra a determinar.

OV_1: Observación de variable 1.

OV_2: Observación de variable 2.

R: Relación entre las variables.

En este caso se empleó un nivel de confianza de 0,9 y un margen de error de 0,1; obteniendo así una muestra de 60 estudiantes, entre los cuales hay 22 varones y 38 mujeres.

3.3 Técnicas de recolección de datos.

Prueba de evaluación.

Descripción de los instrumentos.

El instrumento que se empleó fue una prueba de evaluación, realizada a los estudiantes del curso de Cálculo I, esta evaluación estuvo compuesta por dos partes, la primera parte constó de 7 preguntas relacionadas a la variable 1 y la segunda de 5 preguntas que a su vez contienen sub-preguntas que permitieron evidenciar las capacidades que desarrollaron los estudiantes indicadas en la variable 2.

Los estudiantes resolvieron esta evaluación en un plazo de 2 horas, momento en el cual usaron lapiceros, lápiz, borrador, corrector y calculadora. El desarrollo de la evaluación se realizó en aulas de clase.

3.4 Técnicas estadísticas para el procesamiento de la información.

Los datos que se obtuvieron en la evaluación fueron ingresados en una hoja de Excel. En esta hoja de Excel se determinó el número de estudiantes que conocen los conceptos fundamentales del cálculo que se describen en la variable 1 y los estudiantes que han desarrollado cada capacidad que se menciona en la variable 2. Así mismo, se analizó la incidencia de la variable 1 con respecto a la variable 2, se graficó e interpretó los resultados.

Se elaboraron tablas estadísticas de frecuencia, moda, mediana, media aritmética, desviación estándar y varianza para el análisis de las variables estudiadas y la correlación entre estas variables se realizó con Pearson.

3.5 Aspectos éticos.

Para la realización de esta tesis, se contó con la autorización de la universidad ESAN para llevar a cabo la prueba de evaluación aplicada a los estudiantes del curso de cálculo I. Así mismo, la universidad proporcionó información adicional sobre los estudiantes evaluados que fueron necesarios para el buen desarrollo de esta tesis.

CAPÍTULO IV: RESULTADOS

4.1 Resultados de la evaluación de los conceptos fundamentales del cálculo

A continuación, se muestran los puntajes que obtuvieron los 60 alumnos que fueron evaluados con preguntas teóricas relacionadas a los conceptos fundamentales del cálculo.

Tabla 1: Puntaje de la evaluación de los conceptos fundamentales del cálculo

ALUMNO	PUNTAJE
1	13
2	16
3	13
4	20
5	20
6	15
7	5
8	18
9	20
10	6
11	7
12	18
13	19
14	16
15	16
16	15

17	15
18	16
19	16
20	16
21	18
22	15
23	18
24	20
25	20
26	20
27	14
28	20
29	20
30	18
31	13
32	16
33	9
34	18
35	17
36	11
37	15
38	17
39	20
40	20
41	16.5
42	10
43	20
44	20
45	17.5
46	13
47	20
48	12
49	14.5
50	18
51	14.5
52	18
53	9.5
54	18
55	15
56	19
57	18
58	19.5
59	20
60	19

En la siguiente tabla se muestran los resultados estadísticos de la evaluación de los conceptos fundamentales del cálculo

Tabla 2: Tabla estadística del puntaje de la evaluación de los conceptos fundamentales del cálculo

Válido	60
Perdidos	0
Media	16,192
Mediana	17,000
Moda	20,0
Desviación estándar	3,7395
Varianza	13,984

La tabla siguiente muestra la frecuencia con la que se repiten los puntajes obtenidos de la evaluación de los conceptos fundamentales del cálculo.

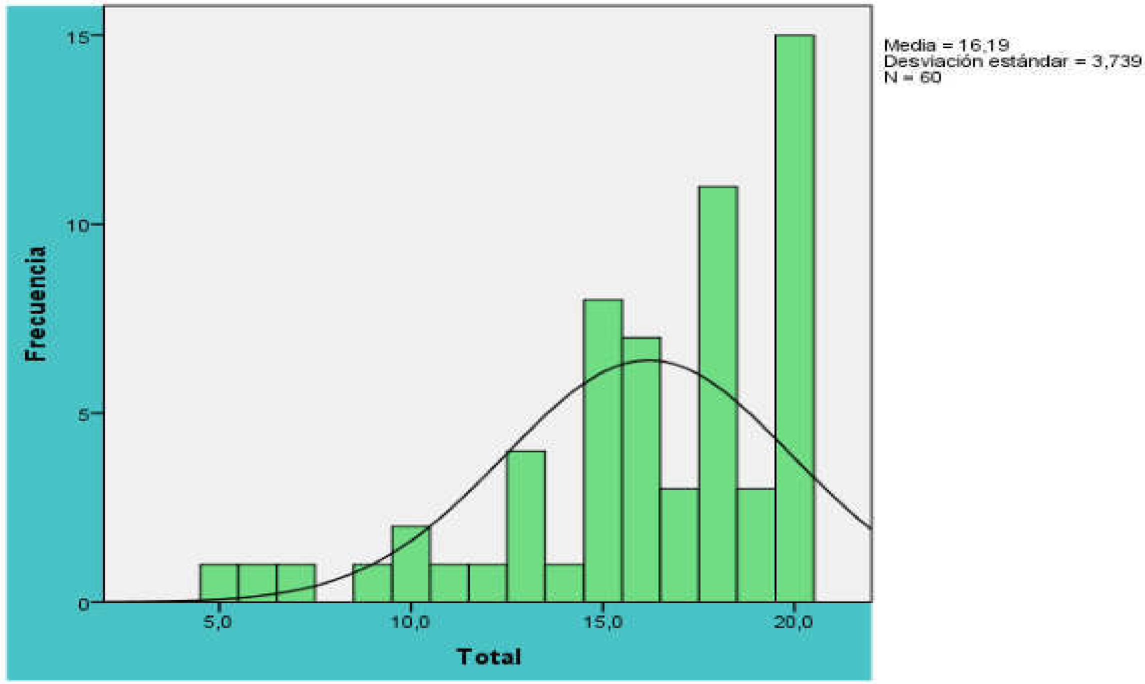
Tabla 3: Tabla de frecuencia del puntaje de la evaluación de los conceptos fundamentales del cálculo

Puntaje	Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
5,0	1	1,7	1,7	1,7
6,0	1	1,7	1,7	3,3
7,0	1	1,7	1,7	5,0
9,0	1	1,7	1,7	6,7
9,5	1	1,7	1,7	8,3

10,0	1	1,7	1,7	10,0
11,0	1	1,7	1,7	11,7
12,0	1	1,7	1,7	13,3
13,0	4	6,7	6,7	20,0
14,0	1	1,7	1,7	21,7
14,5	1	1,7	1,7	23,3
15,0	7	11,7	11,7	35,0
16,0	7	11,7	11,7	46,7
16,5	1	1,7	1,7	48,3
17,0	2	3,3	3,3	51,7
17,5	1	1,7	1,7	53,3
18,0	10	16,7	16,7	70,0
19,0	3	5,0	5,0	75,0
19,5	1	1,7	1,7	76,7
20,0	14	23,3	23,3	100,0
Total	60	100,0	100,0	

A continuación, se muestra el histograma de la frecuencia del puntaje de la evaluación de los conceptos fundamentales del cálculo de los 60 alumnos universitarios.

Figura 1: Histograma de la tabla de frecuencia del puntaje de la evaluación de los conceptos fundamentales del cálculo



INTERPRETACION:

- La mediana es 17.
- La media en este caso representa que el puntaje total de los conceptos fundamentales del cálculo de los estudiantes en promedio es 16,19.

  Es Importante, dado que la mediana es 17 y la media es 16,19 estos valores son aproximadamente iguales; la muestra es simétrica.
- La moda en este caso representa que el puntaje total de los conceptos fundamentales del cálculo de los estudiantes en la práctica más frecuente es de 20.
- La desviación estándar es la medida de dispersión más común, la cual indica qué tan dispersos están los datos alrededor de la media y por lo que representa la raíz cuadrada de la varianza, que en este caso es 3,74.
- La Varianza es el promedio de los cuadrados de las desviaciones medidas alrededor de la media, en este caso la varianza representa del puntaje total

al cuadrado que obtuvieron los estudiantes en los conceptos fundamentales del cálculo es 13,98.

4.2 Resultados de la evaluación de capacidades procedimentales para calcular, analizar e interpretar.

A continuación, se muestran los puntajes que obtuvieron los 60 alumnos que fueron evaluados con preguntas prácticas relacionadas a los conceptos fundamentales del cálculo con el objetivo de evaluar sus capacidades procedimentales para calcular, analizar e interpretar.

Tabla 4: Puntaje de la evaluación de las capacidades procedimentales

ALUMNO	PUNTAJE
1	8.75
2	13
3	11.5
4	19
5	19.25
6	12.75
7	0.75
8	16.5
9	18
10	1.75
11	5.25
12	15.25
13	17.5
14	13.75
15	12.5
16	12.25
17	12.5
18	13.5
19	13.5
20	14
21	13.75
22	10
23	17.5
24	18
25	19.25

26	19.5
27	8.75
28	17
29	19.5
30	17.5
31	11
32	14.25
33	6.5
34	14.75
35	16
36	9.25
37	12.5
38	14.75
39	18.5
40	19.25
41	14.5
42	8.75
43	17.5
44	18.25
45	12.75
46	9
47	17.25
48	11
49	12.75
50	17.5
51	12.25
52	17
53	7.75
54	16
55	13.5
56	18
57	15.5
58	17.25
59	18.25
60	16.75

La tabla siguiente muestra los datos estadísticos de la evaluación de las capacidades procedimentales

Tabla 5: Tabla de datos estadísticos del puntaje de la evaluación de capacidades procedimentales

Válido	60
Perdidos	0
Media	14,0042
Mediana	14,3750
Moda	17,50
Desviación estándar	4,29315
Varianza	18,431

La tabla siguiente muestra la frecuencia con la que se repiten los puntajes obtenidos de la evaluación de los conceptos fundamentales del cálculo

Tabla 6: Tabla de Frecuencia del puntaje obtenido en la evaluación de los conceptos fundamentales del cálculo

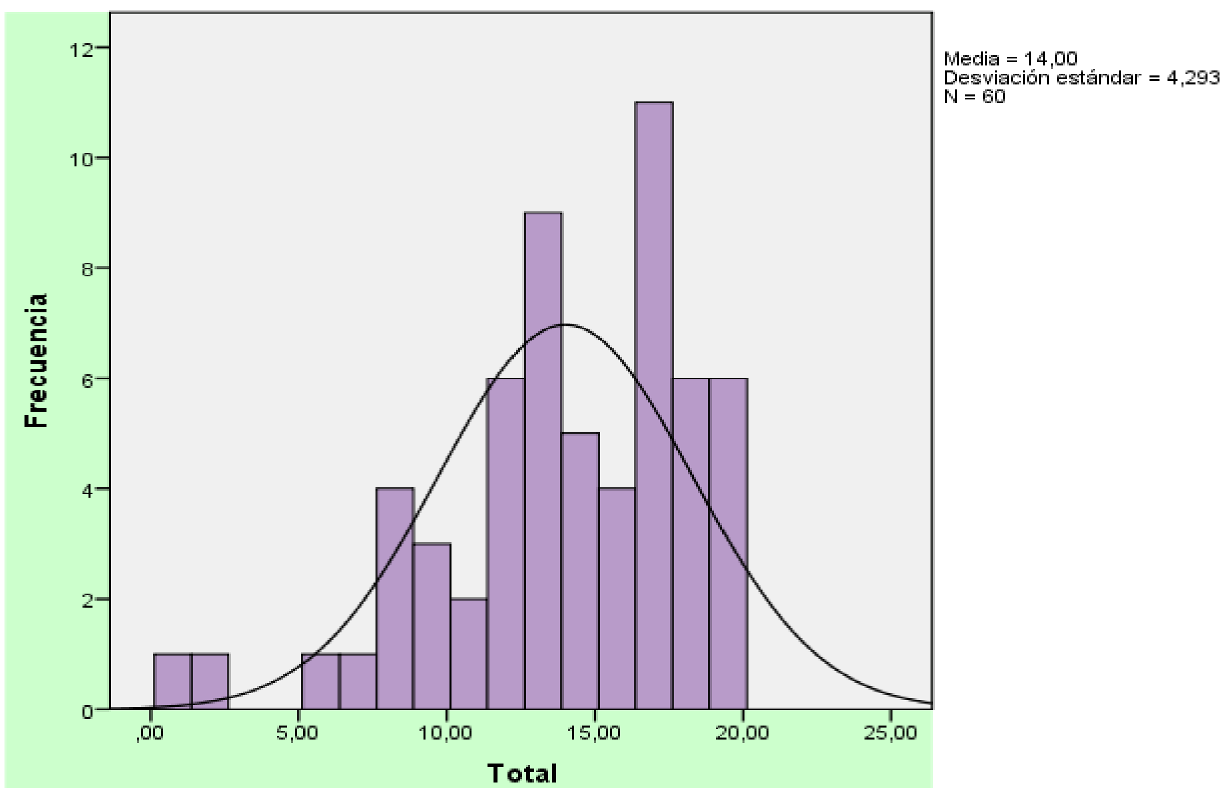
Puntaje	Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
0,75	1	1,7	1,7	1,7
1,75	1	1,7	1,7	3,3
5,25	1	1,7	1,7	5,0
6,50	1	1,7	1,7	6,7
7,75	1	1,7	1,7	8,3
8,75	3	5,0	5,0	13,3
9,00	1	1,7	1,7	15,0

9,25	1	1,7	1,7	16,7
10,00	1	1,7	1,7	18,3
11,00	2	3,3	3,3	21,7
11,50	1	1,7	1,7	23,3
12,25	2	3,3	3,3	26,7
12,50	3	5,0	5,0	31,7
12,75	3	5,0	5,0	36,7
13,00	1	1,7	1,7	38,3
13,50	3	5,0	5,0	43,3
13,75	2	3,3	3,3	46,7
14,00	1	1,7	1,7	48,3
14,25	1	1,7	1,7	50,0
14,50	1	1,7	1,7	51,7
14,75	2	3,3	3,3	55,0
15,25	1	1,7	1,7	56,7
15,50	1	1,7	1,7	58,3
16,00	2	3,3	3,3	61,7
16,50	1	1,7	1,7	63,3
16,75	1	1,7	1,7	65,0
17,00	2	3,3	3,3	68,3
17,25	2	3,3	3,3	71,7
17,50	5	8,3	8,3	80,0
18,00	3	5,0	5,0	85,0

18,25	2	3,3	3,3	88,3
18,50	1	1,7	1,7	90,0
19,00	1	1,7	1,7	91,7
19,25	3	5,0	5,0	96,7
19,50	2	3,3	3,3	100,0
Total	60	100,0	100,0	

A continuación, se muestra el histograma de la frecuencia del puntaje de la evaluación del desarrollo de capacidades procedimentales de los 60 alumnos universitarios.

Figura 2: Histograma de la tabla de frecuencia del puntaje obtenido en la evaluación de desarrollo de capacidades procedimentales



INTERPRETACION:

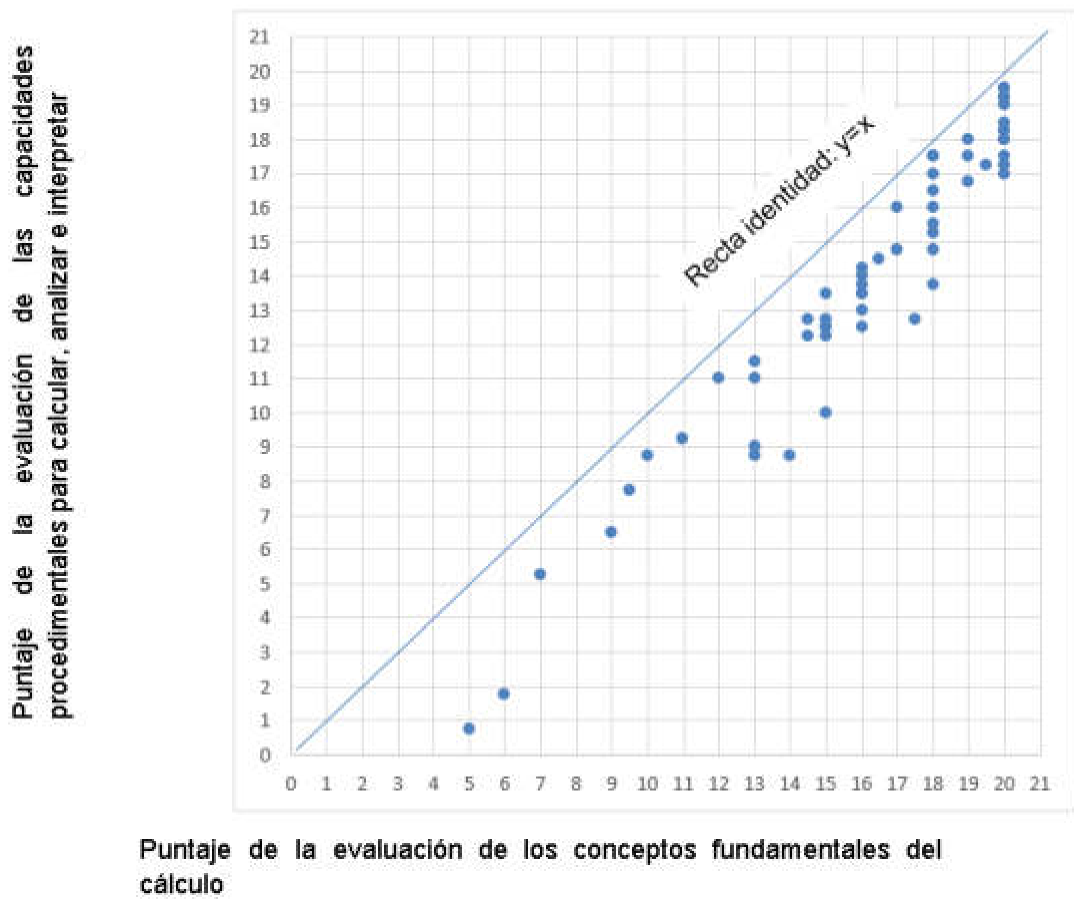
- La mediana es 14,38.
- La media en este caso representa que el puntaje total de los estudiantes en promedio es 14,00.

  Importancia: dado que la media es 14,00 y la mediana 14,38; dichos valores son aproximadamente iguales; la muestra es simétrica.
- La moda en este caso representa que el puntaje total de los estudiantes en la práctica más frecuente es de 17,50.
- La desviación estándar es la medida de dispersión más común, que indica qué tan dispersos están los datos alrededor de la media. Además, representa la raíz cuadrada de la varianza en este caso es 4,29.
- La Varianza es el promedio de los cuadrados de las desviaciones medidas alrededor de la media, en este caso la varianza representa 18,43 del puntaje total al cuadrado que obtuvieron los estudiantes en la práctica.

4.3 Prueba de hipótesis: gráfico de los puntajes totales de la evaluación de los conceptos fundamentales del cálculo y las capacidades procedimentales para calcular, analizar e interpretar

En el gráfico siguiente se muestran en el eje horizontal el puntaje que obtuvo cada uno de los 60 alumnos en la evaluación de los conceptos fundamentales del cálculo y en el eje vertical se muestra el puntaje que obtiene el alumno en la evaluación de las capacidades procedimentales para calcular, analizar e interpretar. Además se muestra la recta: y=x para visualizar que tanto se aproximan ambos puntajes por alumno y como se puede observar el puntaje del eje vertical se aproxima al del eje horizontal.

Figura 3: Gráfico comparativo de los puntajes de las evaluaciones de los conceptos fundamentales del cálculo y las capacidades procedimentales para calcular, analizar e interpretar



4.4 Correlación entre los puntajes de las evaluaciones de los conceptos fundamentales del cálculo y las capacidades procedimentales para calcular, analizar e interpretar

En la tabla que a continuación se muestra, se puede observar la correlación entre los puntajes de las evaluaciones de los conceptos fundamentales del cálculo y de las capacidades procedimentales para calcular, analizar e interpretar.

Tabla 7: Correlación de Pearson para los puntajes de las evaluaciones de los conceptos fundamentales del cálculo y de las capacidades procedimentales para calcular, analizar e interpretar.

		Puntaje de las evaluaciones de los conceptos fundamentales del cálculo.	Puntaje de las evaluaciones de las capacidades procedimentales para calcular, analizar e interpretar.
Puntaje de las evaluaciones de los conceptos fundamentales del cálculo	Correlación de Pearson	1	0,966
	Sig. (bilateral)		0,000
	N	60	60
Puntaje de las evaluaciones de las capacidades	Correlación de Pearson	0,966	1
	Sig. (bilateral)	0,000	

procedimentales para calcular, analizar e interpretar	N	60	60

La correlación es significativa en el nivel 0,01 (bilateral).

INTERPRETACION:

H0: r =0

H1: r diferente =0

Dado que el p-valor es menor que 0.05, rechazamos la hipótesis nula, por consiguiente, se puede afirmar que el puntaje de las evaluaciones de los conceptos fundamentales del cálculo está relacionado significativamente con el puntaje de las evaluaciones de las capacidades procedimentales para calcular, analizar e interpretar. Por otra parte, el coeficiente de correlación de Pearson = 0,966, lo cual indica una correlación positiva muy fuerte, es decir, el puntaje de las evaluaciones de las capacidades procedimentales para calcular, analizar e interpretar se asemeja o aproxima al de los conceptos fundamentales del cálculo.

4.5 Resultados de la evaluación de los conceptos fundamentales del cálculo por capacidad para calcular, analizar e interpretar

A continuación, se muestran los puntajes que obtuvieron los 60 alumnos que fueron evaluados con preguntas teóricas relacionadas a los conceptos fundamentales del cálculo distribuidos en 3 capacidades, capacidad de calcular, analizar e interpretar.

Tabla 8: Puntaje de la evaluación de los conceptos fundamentales del cálculo por capacidad.

ALUMNO	PUNTAJE PARA CALCULAR	PUNTAJE PARA ANALIZAR	PUNTAJE PARA INTERPRETAR
1	13.33	12.00	15.00
2	20.00	12.00	20.00
3	20.00	8.00	15.00
4	20.00	20.00	20.00
5	20.00	20.00	20.00
6	20.00	10.00	20.00
7	10.00	0.00	10.00
8	20.00	16.00	20.00
9	20.00	20.00	20.00
10	10.00	2.00	10.00
11	10.00	4.00	10.00
12	20.00	18.00	15.00
13	20.00	18.00	20.00
14	16.67	16.00	15.00
15	20.00	14.00	15.00
16	16.67	14.00	15.00
17	20.00	12.00	15.00
18	20.00	14.00	15.00
19	20.00	14.00	15.00
20	20.00	12.00	20.00
21	20.00	16.00	20.00
22	13.33	16.00	15.00
23	20.00	16.00	20.00
24	20.00	20.00	20.00
25	20.00	20.00	20.00
26	20.00	20.00	20.00
27	13.33	14.00	15.00
28	20.00	20.00	20.00
29	20.00	20.00	20.00
30	20.00	16.00	20.00
31	16.67	14.00	5.00
32	20.00	14.00	15.00
33	10.00	6.00	15.00

34	20.00	16.00	20.00
35	13.33	18.00	20.00
36	10.00	12.00	10.00
37	20.00	14.00	10.00
38	16.67	16.00	20.00
39	20.00	20.00	20.00
40	20.00	20.00	20.00
41	20.00	15.00	15.00
42	13.33	8.00	10.00
43	20.00	20.00	20.00
44	20.00	20.00	20.00
45	20.00	15.00	20.00
46	20.00	10.00	10.00
47	20.00	20.00	20.00
48	20.00	12.00	0.00
49	13.33	13.00	20.00
50	20.00	17.00	17.50
51	16.67	17.00	5.00
52	20.00	18.00	15.00
53	6.67	9.00	15.00
54	20.00	16.00	20.00
55	20.00	14.00	10.00
56	20.00	18.00	20.00
57	20.00	16.00	20.00
58	20.00	19.00	20.00
59	20.00	20.00	20.00
60	20.00	18.00	20.00

En la siguiente tabla se muestran los resultados estadísticos de la evaluación de los conceptos fundamentales del cálculo por cada capacidad mencionada.

Tabla 9; Tabla estadística sobre el puntaje de la evaluación de los conceptos fundamentales del cálculo por capacidad

	Capacidad de calcular	Capacidad de analizar	Capacidad de interpretar
Válido	60	60	60
Perdidos	0	0	0

Media	18,0000	14,9833	16,4583
Mediana	20,0000	16,0000	20,0000
Moda	20,00	20,00	20,00
Desviación estándar	3,58922	4,66684	4,70061
Varianza	12,882	21,779	22,096

Las tablas siguientes muestran la frecuencia con la que se repiten las categorías de calificación obtenidas de la evaluación de los conceptos fundamentales del cálculo por capacidad, teniendo en cuenta que dichas categorías de calificación son distribuidas de la siguiente manera: los alumnos que tienen puntaje de 0 a 4, se considera “Muy Mal”, de 4.1 a 8 “Mal”, de 8.1 a 12 “Regular”, de 12.1 a 16 “Bien” y de 16.1 a 20 “Muy Bien”.

Tabla 10: Tabla de Frecuencia del puntaje de la evaluación de los conceptos fundamentales del cálculo relacionados a la capacidad de calcular

Categoría	Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
mal	1	1,7	1,7	1,7
regular	5	8,3	8,3	10,0
bien	6	10,0	10,0	20,0
muy bien	48	80,0	80,0	100,0
Total	60	100,0	100,0	

Tabla 11: Tabla de Frecuencia del puntaje de la evaluación de los conceptos fundamentales del cálculo relacionados a la capacidad de analizar

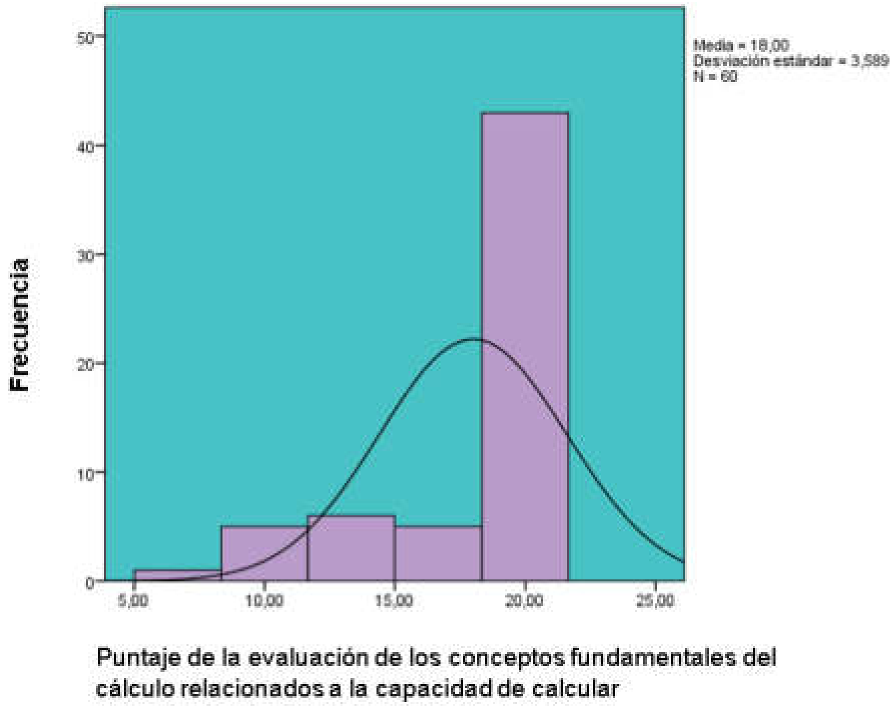
Categoría	Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
muy mal	3	5,0	5,0	5,0
mal	3	5,0	5,0	10,0
regular	9	15,0	15,0	25,0
bien	22	36,7	36,7	61,7
muy bien	23	38,3	38,3	100,0
Total	60	100,0	100,0	

Tabla 12: Tabla de Frecuencia del puntaje de la evaluación de los conceptos fundamentales del cálculo relacionados a la capacidad de interpretar

Categoría	Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
muy mal	1	1,7	1,7	1,7
mal	2	3,3	3,3	5,0
regular	8	13,3	13,3	18,3
bien	16	26,7	26,7	45,0
muy bien	33	55,0	55,0	100,0
Total	60	100,0	100,0	

A continuación se muestra el histograma de la frecuencia con la que se repiten los puntajes de las evaluaciones de los conceptos fundamentales del cálculo relacionados a la capacidad de calcular de los 60 estudiantes universitarios.

Figura 3: Histograma de la frecuencia del puntaje de la evaluación de los conceptos fundamentales del cálculo relacionados a la capacidad de calcular



INTERPRETACION:

- La mediana es 20.
- La media en este caso representa el puntaje de conceptos fundamentales del cálculo para poder determinar, este puntaje total de los estudiantes en promedio es 18.

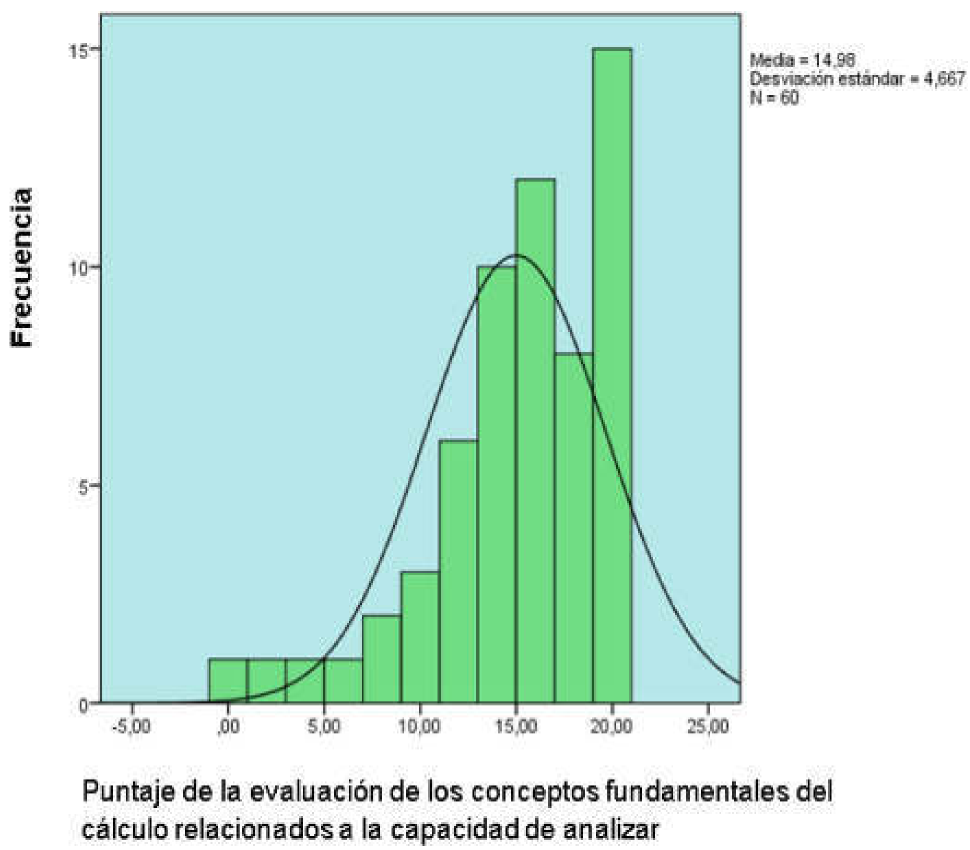
  Importancia: dado que la mediana es 20 y la media es 18, estos valores son aproximadamente iguales. Asimismo, la muestra es simétrica.

  La moda en este caso representa que el puntaje total de los conceptos fundamentales para calcular de los estudiantes más frecuente es de 20.

- La desviación estándar es la medida de dispersión más común, que indica qué tan dispersos están los datos alrededor de la media; por lo cual representa la raíz cuadrada de la varianza, en este caso es 3,59.
- La Varianza es el promedio de los cuadrados de las desviaciones medidas alrededor de la media, en este caso la varianza es 12,88.

A continuación, se muestra el histograma de la frecuencia con la que se repiten los puntajes de las evaluaciones de los conceptos fundamentales del cálculo relacionados a la capacidad de analizar de los 60 estudiantes universitarios.

Figura 4: Histograma de la frecuencia del puntaje de la evaluación de los conceptos fundamentales del cálculo relacionados a la capacidad de analizar



INTERPRETACION:

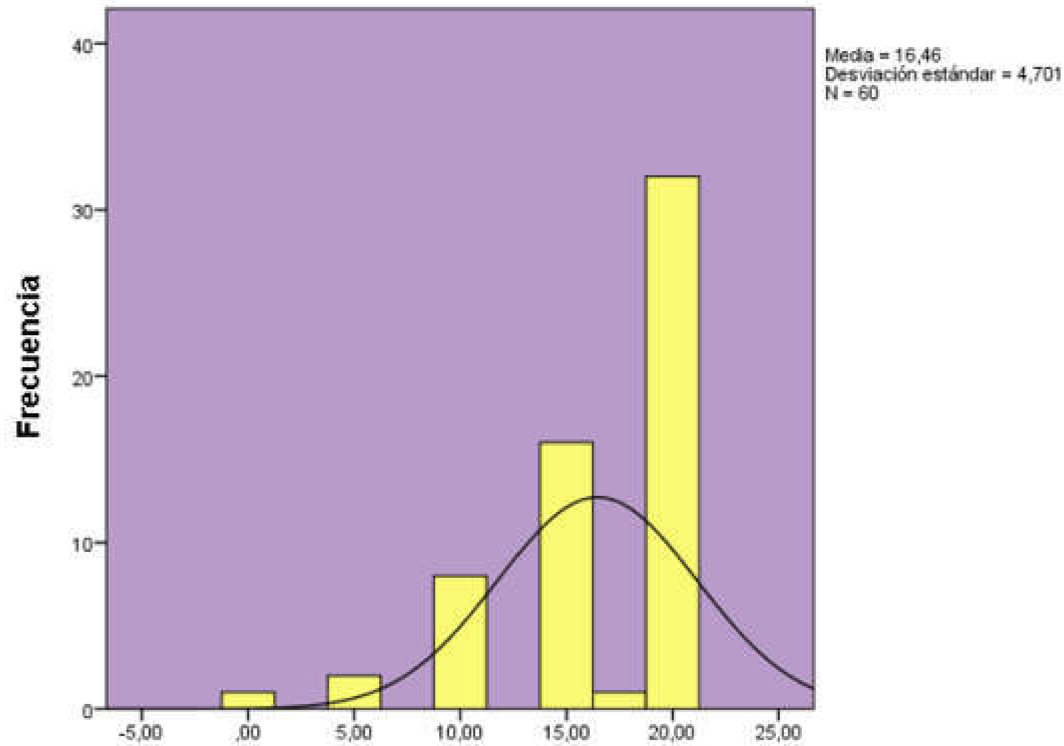
- La mediana es 16.
- La media en este caso representa el puntaje de conceptos fundamentales, para poder analizar el puntaje total de los estudiantes en promedio es 14,98.

  Importancia: dado que la mediana es 16 y la media es 14,98 son valores aproximadamente iguales, la muestra es simétrica.

  La moda en este caso representa que es los conceptos fundamentales para analizar el puntaje total de los estudiantes más frecuente es de 20.
- La desviación estándar es la medida de dispersión más común, la cual indica qué tan dispersos están los datos alrededor de la media. Asimismo, representa la raíz cuadrada de la varianza, que en este caso es 4,67.
- La Varianza es el promedio de los cuadrados de las desviaciones medidas alrededor de la media, en este caso la varianza es 21,78.

A continuación, se muestra el histograma de la frecuencia con la que se repiten los puntajes de las evaluaciones de los conceptos fundamentales del cálculo relacionados a la capacidad de interpretar de los 60 estudiantes universitarios.

Figura 5: Histograma de la frecuencia del puntaje de la evaluación de los conceptos fundamentales del cálculo relacionados a la capacidad de interpretar.



Puntaje de la evaluación de los conceptos fundamentales del cálculo relacionados a la capacidad de interpretar

INTERPRETACION:

- La mediana es 20.
- La media en este caso representa el puntaje de conceptos fundamentales para poder interpretar, este puntaje total de los estudiantes en promedio es 16,46.

  Importancia: dado que la mediana es 20 y la media es 16,46, estos valores son aproximadamente iguales, la muestra es simétrica.

  La moda representa el puntaje de los conceptos fundamentales para interpretar de los estudiantes más frecuente, que en este caso es de 20.

- La desviación estándar es la medida de dispersión más común, que indica qué tan dispersos están los datos alrededor de la media y por lo que representa la raíz cuadrada de la varianza, que para esta muestra es 4,70.
- La Varianza es el promedio de los cuadrados de las desviaciones medidas alrededor de la media, en este caso la varianza es 22,10.

4.6 Resultados de la evaluación de las capacidades procedimentales para calcular, analizar e interpretar

A continuación, se muestran los puntajes que obtuvieron los 60 alumnos que fueron evaluados con preguntas de la parte práctica relacionadas a las capacidades procedimentales para calcular, analizar e interpretar.

Tabla 13: Tabla del puntaje de la evaluación de las capacidades procedimentales para calcular, analizar e interpretar

ALUMNO	PUNTAJE PARA CALCULAR	PUNTAJE PARA ANALIZAR	PUNTAJE PARA INTERPRETAR
1	11.25	5.29	11.43
2	17.50	8.82	12.86
3	16.25	5.88	14.29
4	19.38	19.41	17.14
5	18.13	20.00	20.00
6	14.38	10.00	15.71
7	1.25	0.00	1.43
8	20.00	11.76	20.00
9	19.38	18.24	14.29
10	1.88	1.18	2.86
11	8.13	1.76	7.14
12	18.75	16.47	4.29
13	17.50	17.65	17.14
14	16.25	12.35	11.43
15	18.75	7.06	11.43
16	15.00	8.82	14.29

17	15.00	10.59	11.43
18	14.38	13.53	11.43
19	18.75	11.76	5.71
20	16.25	10.59	17.14
21	15.63	10.59	17.14
22	10.63	8.82	11.43
23	18.75	15.29	20.00
24	17.50	18.82	17.14
25	19.38	18.82	20.00
26	18.75	20.00	20.00
27	8.75	7.65	11.43
28	18.13	16.47	15.71
29	18.75	20.00	20.00
30	19.38	14.71	20.00
31	15.00	11.18	1.43
32	16.88	11.76	14.29
33	8.13	2.94	11.43
34	13.13	15.29	17.14
35	12.50	17.65	20.00
36	8.75	9.41	10.00
37	15.00	12.35	7.14
38	15.63	12.94	17.14
39	18.13	19.41	17.14
40	18.75	19.41	20.00
41	15.00	14.12	14.29
42	13.13	6.47	4.29
43	18.75	16.47	17.14
44	19.38	20.00	11.43
45	11.25	12.94	15.71
46	16.25	3.53	5.71
47	17.50	18.24	14.29
48	16.25	10.59	0.00
49	11.25	12.35	17.14
50	19.38	16.47	15.71
51	15.00	12.94	4.29
52	18.13	17.65	12.86
53	6.25	7.06	12.86
54	15.63	14.71	20.00
55	17.50	13.53	4.29
56	18.75	17.65	17.14
57	16.88	12.35	20.00
58	17.50	17.06	17.14
59	17.50	18.24	20.00
60	17.50	15.88	17.14

En la siguiente tabla se muestran los resultados estadísticos de la evaluación de las capacidades procedimentales para calcular, analizar e interpretar.

Tabla 14: Tabla estadística del puntaje de la evaluación de las capacidades procedimentales para calcular

	Capacidad de calcular	Capacidad de analizar	Capacidad de interpretar
Válido	60	60	60
Perdidos	0	0	0
Media	15,4082	12,8820	13,5238
Mediana	16,5650	12,9400	14,2900
Moda	18,75	10, 59	17,14
Desviación estándar	4,21359	5,25808	5,64925
Varianza	17,754	27,647	31,914

Las tablas siguientes muestran la frecuencia con la que se repiten las categorías de calificación obtenidas las capacidades procedimentales para calcular, analizar e interpretar. Teniendo en cuenta que dichas categorías de calificación son distribuidas de la siguiente manera: los alumnos que tienen puntaje de 0 a 4, se considera “Muy Mal”, de 4.1 a 8 “Mal”, de 8.1 a 12 “Regular”, de 12.1 a 16 “Bien” y de 16.1 a 20 “Muy Bien”.

Tabla 15: Tabla de Frecuencia del puntaje de la evaluación de la capacidad procedimental para calcular

Categoría	Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
muy mal	2	3,3	3,3	3,3
mal	3	5,0	5,0	8,3
regular	6	10,0	10,0	18,3
bien	19	31,7	31,7	50,0
muy bien	30	50,0	50,0	100,0
Total	60	100,0	100,0	

Tabla 16: Tabla de Frecuencia del puntaje de la evaluación de la capacidad procedimental para analizar

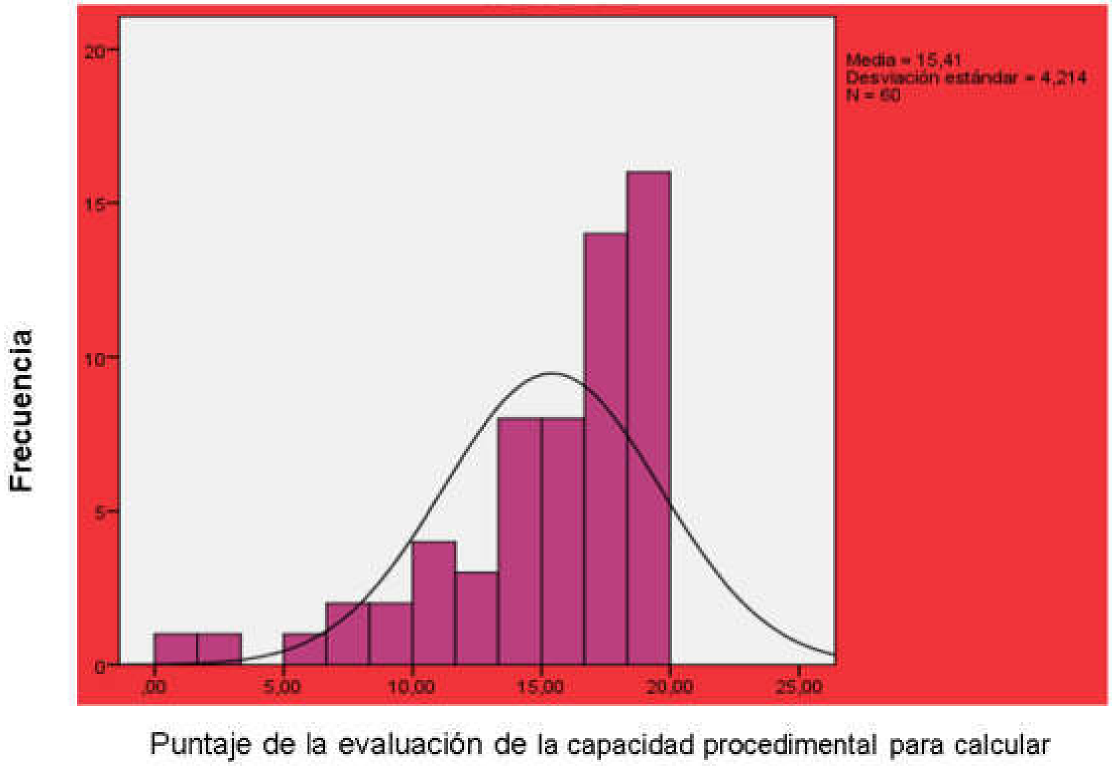
Categoría	Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
muy mal	5	8.3	8.3	8,3
mal	6	10,0	10,0	18,3
regular	17	28,4	28, 4	46,7
bien	11	18,3	18,3	65,0
muy bien	21	35	35	100,0
Total	60	100,0	100,0	

Tabla 17: Tabla de Frecuencia del puntaje de la evaluación de la capacidad procedimental para interpretar

Categoría	Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
muy mal	8	13,3	13,3	13,3
mal	4	6,7	6,7	20,0
regular	10	16,7	16,7	36,7
Bien	13	21,6	21,6	58,3
muy bien	25	41,7	41,7	100,0
Total	60	100,0	100,0	

Acto seguido, se muestra el histograma de la frecuencia con la que se repiten los puntajes de las evaluaciones de la capacidad procedimental de calcular de los 60 estudiantes universitarios.

Figura 6: Histograma de la frecuencia del puntaje de la evaluación de la capacidad procedimental para calcular



INTERPRETACION:

- La mediana es 16,57.
- La media en este caso representa que en la capacidad procedimental para calcular, el puntaje total de los estudiantes en promedio es 15,41.

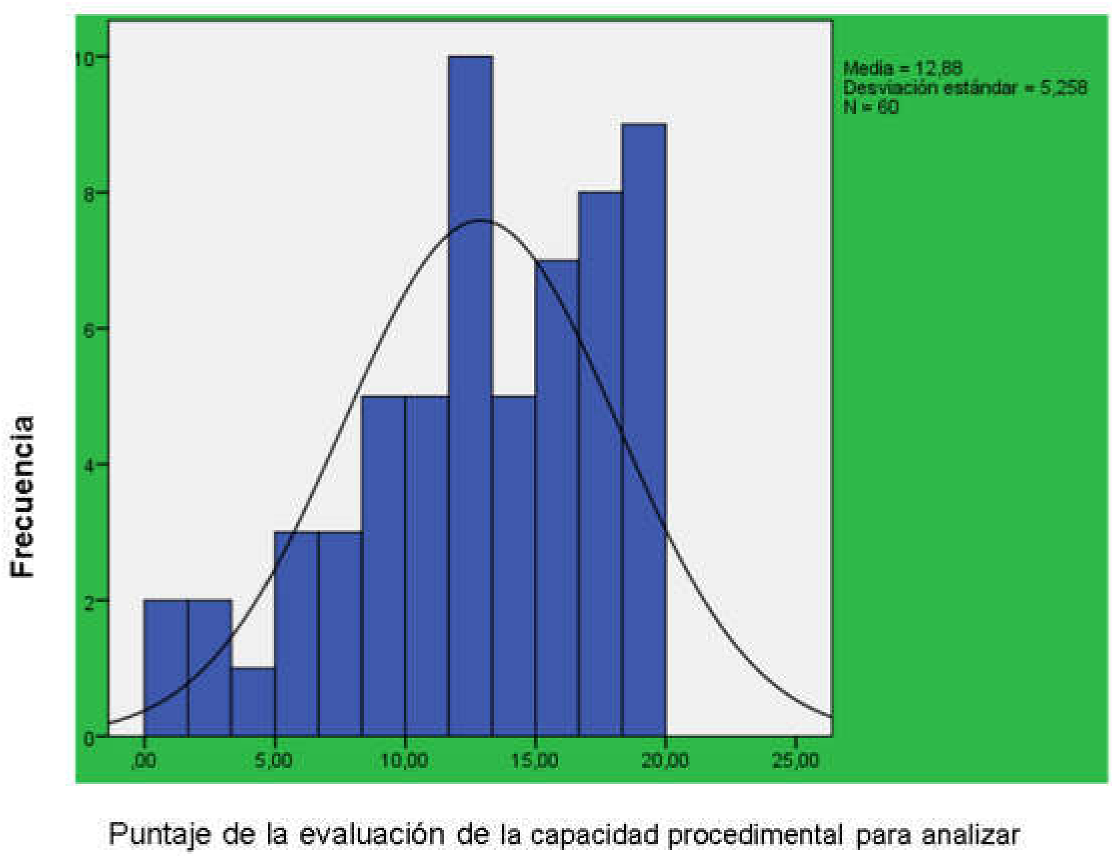
  Importancia: dado que la mediana es 16,57 y la media es 15,41 son valores aproximadamente iguales y la muestra es simétrica.

  La moda en este caso representa que en la capacidad procedimental para calcular, el puntaje total de los estudiantes más frecuente es de 18,75.
- La desviación estándar es la medida de dispersión más común, la cual indica qué tan dispersos están los datos alrededor de la media. Asimismo, representa la raíz cuadrada de la varianza, que en este caso es 4,21.

- La Varianza es el promedio de los cuadrados de las desviaciones medidas alrededor de la media, en este caso la varianza representa la capacidad procedimental para calcular, el puntaje total al cuadrado que obtuvieron en la teoría es 17,75.

A continuación, se muestra el histograma de la frecuencia con la que se repiten los puntajes de las evaluaciones de la capacidad procedimental de analizar de los 60 estudiantes universitarios.

Figura 7: Histograma de la frecuencia del puntaje de la evaluación de la capacidad procedimental para analizar



INTERPRETACION:

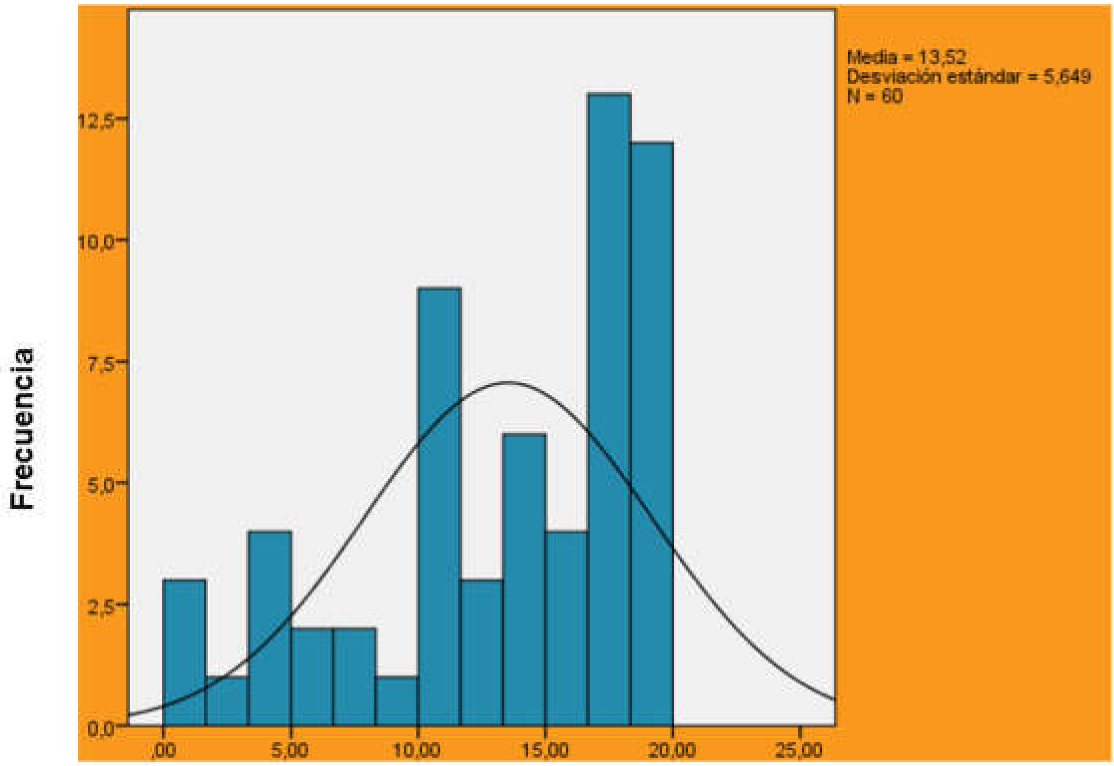
- La mediana es 12,94.

- La media en este caso representa que en la capacidad procedimental para analizar el puntaje total de los estudiantes en promedio es 12,88.

  Importancia: dado que la mediana es 12,94 y la media es 12,88, dichos valores son aproximadamente iguales la muestra, que es simétrica.
- La moda en este caso representa que en la capacidad procedimental para analizar, el puntaje total de los estudiantes más frecuente es de 10,59.
- La desviación estándar es la medida de dispersión más común, la cual indica qué tan dispersos están los datos alrededor de la media; por lo que representa la raíz cuadrada de la varianza que en este caso es 5,26
- La Varianza es el promedio de los cuadrados de las desviaciones medidas alrededor de la media, en este caso la varianza representa en la capacidad procedimental para analizar, el puntaje total al cuadrado que obtuvieron en la teoría es 27,65.

A continuación, se muestra el histograma de la frecuencia con la que se repiten los puntajes de las evaluaciones de la capacidad procedimental de interpretar de los 60 estudiantes universitarios.

Figura 8: Histograma de la frecuencia del puntaje de la evaluación de la capacidad procedimental para interpretar



INTERPRETACION:

- La mediana es 14,29.
- La media en este caso representa que en la capacidad procedimental para analizar el puntaje total de los estudiantes en promedio es 13,52.

  Importancia: dado que la mediana es 14,29 y la media es 13,52 son valores aproximadamente iguales la muestra es simétrica.

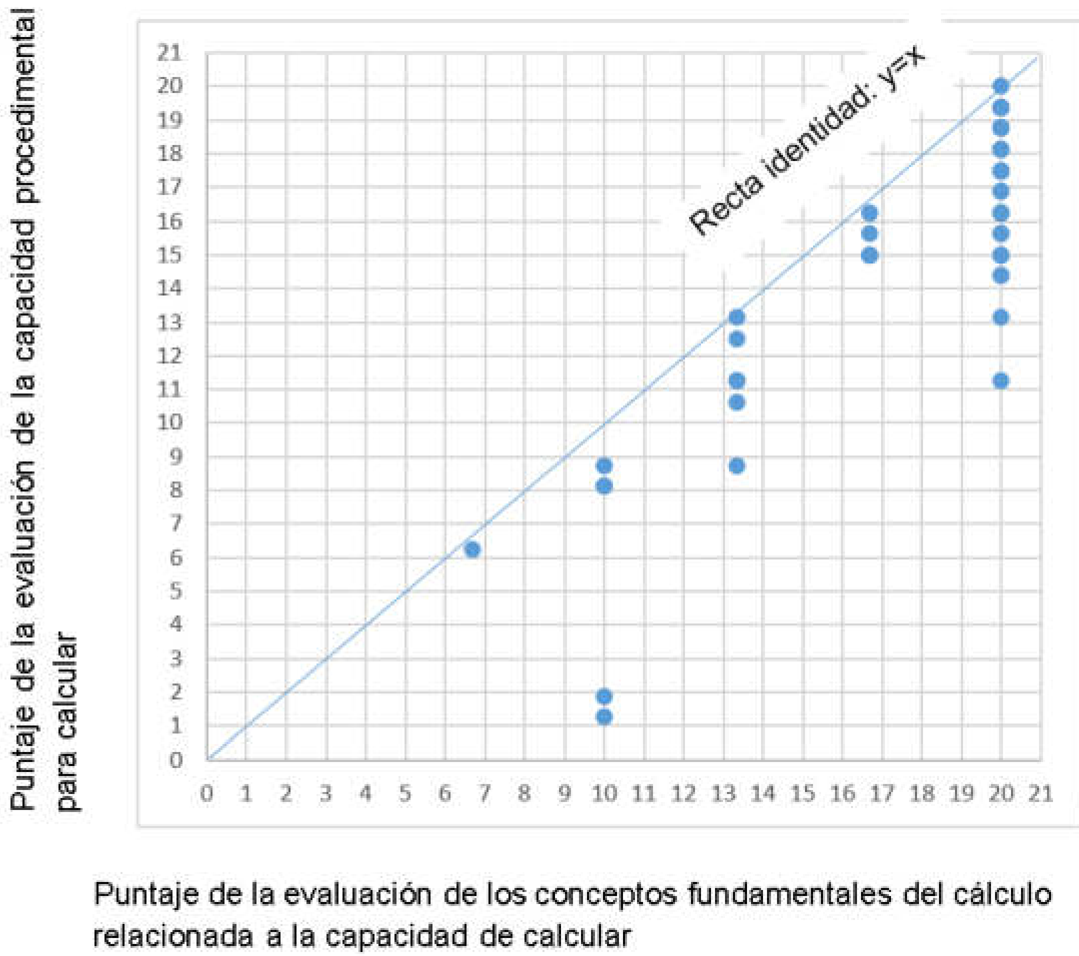
  La moda en este caso representa la capacidad procedimental para analizar el puntaje total de los estudiantes más frecuente es de 17,14.
- La desviación estándar es la medida de dispersión más común, que indica qué tan dispersos están los datos alrededor de la media y por lo que representa la raíz cuadrada de la varianza, que en este caso es 5,65

- La Varianza es el promedio de los cuadrados de las desviaciones medidas alrededor de la media, en este caso la varianza representa la capacidad procedimental para analizar, el puntaje total al cuadrado que obtuvieron en la teoría es de 31,91.

4.7 Prueba de hipótesis: gráficos de los puntajes por capacidad de la evaluación de los conceptos fundamentales del cálculo y las capacidades procedimentales para calcular, analizar e interpretar

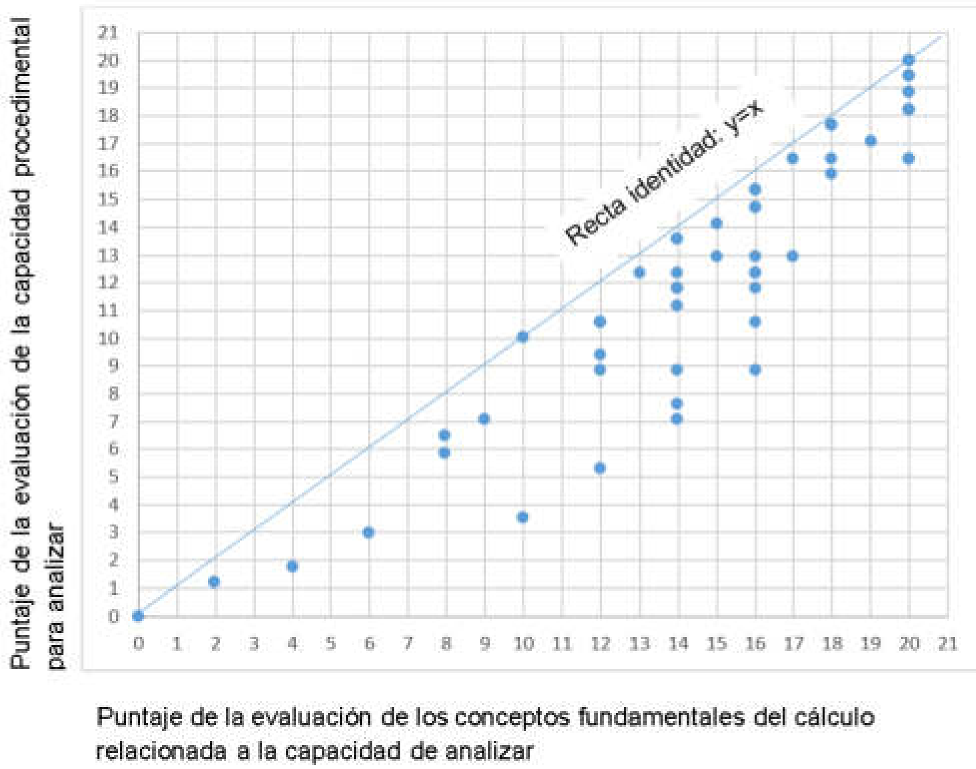
En el gráfico siguiente se muestran en el eje horizontal el puntaje que obtuvo cada uno de los 60 alumnos en la evaluación de los conceptos fundamentales del cálculo relacionados a la capacidad de calcular y en el eje vertical se muestra el puntaje que obtiene el alumno en la evaluación de la parte práctica de la capacidad procedimental para calcular. Además, se muestra la recta: y=x para visualizar qué tanto se aproximan ambos puntajes por alumno y como se puede observar el puntaje del eje vertical se aproxima al del eje horizontal.

Figura 9: Gráfico comparativo de los puntajes de las evaluaciones de los conceptos fundamentales del cálculo y la capacidad procedimental para calcular



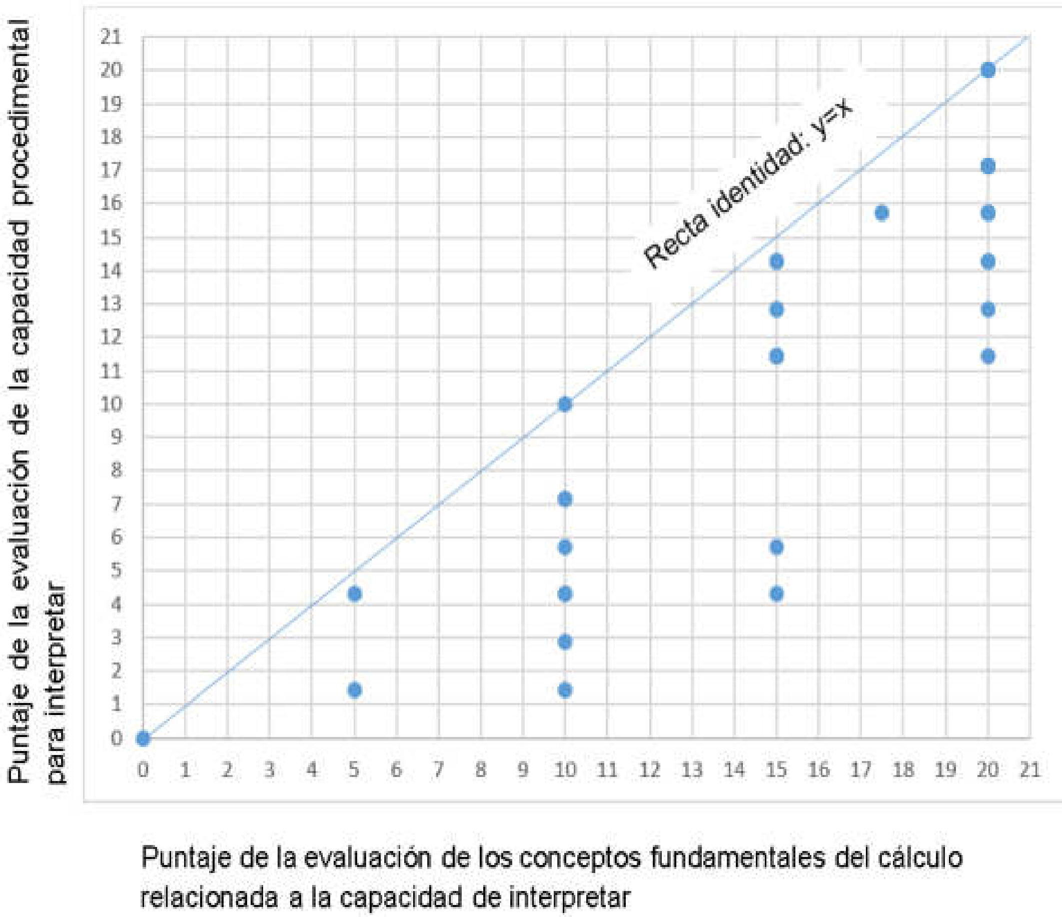
En el gráfico siguiente se muestran en el eje horizontal el puntaje que obtuvo cada uno de los 60 alumnos en la evaluación de los conceptos fundamentales del cálculo relacionados a la capacidad de analizar y en el eje vertical se muestra el puntaje que obtiene el alumno en la evaluación de la parte práctica de la capacidad procedimental para analizar. Además, se muestra la recta: y=x para visualizar qué tanto se aproximan ambos puntajes por alumno y tal como se puede observar el puntaje del eje vertical se aproxima al del eje horizontal.

Figura 10: Gráfico comparativo de los puntajes de las evaluaciones de los conceptos fundamentales del cálculo y la capacidad procedimental para analizar



En el gráfico siguiente se muestran en el eje horizontal el puntaje que obtuvo cada uno de los 60 alumnos en la evaluación de los conceptos fundamentales del cálculo relacionados a la capacidad de interpretar y en el eje vertical se muestra el puntaje que obtiene el alumno en la evaluación de la parte práctica de la capacidad procedimental para interpretar. Además, se muestra la recta: y=x para visualizar qué tanto se aproximan ambos puntajes por alumno, como se puede observar el puntaje del eje vertical se aproxima al del eje horizontal.

Figura 11: Gráfico comparativo de los puntajes de las evaluaciones de los conceptos fundamentales del cálculo y la capacidad procedimental para interpretar



4.8 Correlación entre los conceptos fundamentales del cálculo y el desarrollo de las capacidades procedimentales para calcular, analizar e interpretar

En la tabla que a continuación se muestra se puede observar la correlación entre los puntajes de las evaluaciones de los conceptos fundamentales del cálculo distribuidos en capacidades y el desarrollo de las capacidades procedimentales para calcular, analizar e interpretar.

Tabla 18: correlación entre los conceptos fundamentales del cálculo distribuidos en capacidades y las capacidades procedimentales para calcular, analizar e interpretar.

Correlaciones								
			Conceptos fundamentales del cálculo relacionadas a las capacidades de:			Capacidades procedimentales para:		
			Calcular	Analizar	Interpretar	Calcular	Analizar	Interpretar
Conceptos fundamentales del cálculo relacionadas a las capacidades de:	Calcular	Correlación de Pearson	1	0,735**	0,442**	0,872**	0,778**	0,420**
		Sig. (bilateral)		0,000	0,000	,000	0,000	0,001
		N	60	60	60	60	60	60
	Analizar	Correlación de Pearson	0,735**	1	0,591**	,644**	0,932**	0,570**
		Sig. (bilateral)	,000		0,000	,000	0,000	0,000
		N	60	60	60	60	60	60
	Interpretar	Correlación de Pearson	0,442**	0,591**	1	,381**	0,595**	0,893**
		Sig. (bilateral)	,000	0,000		,003	0,000	0,000
		N	60	60	60	60	60	60
Capacidades procedimentales para:	Calcular	Correlación de Pearson	0,872**	0,644**	0,381**	1	0,649**	0,393**
		Sig. (bilateral)	0,000	0,000	0,003		0,000	0,002
		N	60	60	60	60	60	60
	Analizar	Correlación de Pearson	0,778**	0,932**	0,595**	,649**	1	0,561**
		Sig. (bilateral)	,000	,000	0,000	,000		0,000
		N	60	60	60	60	60	60
	Interpretar	Correlación de Pearson	0,420**	0,570**	0,893**	,393**	0,561**	1
		Sig. (bilateral)	0,001	0,000	0,000	,002	0,000	
		N	60	60	60	60	60	60

**. La correlación es significativa en el nivel 0,01 (bilateral).

INTERPRETACION:

- el coeficiente de correlación de Pearson = 0,872, indica una correlación positiva fuerte. Donde el puntaje de la capacidad procedimental para calcular; guarda relación con el puntaje en conceptos fundamentales de calcular. Por lo que se puede apreciar que son similares.
- el coeficiente de correlación de Pearson = 0,932, muestra una correlación positiva muy fuerte. Donde el puntaje de la capacidad procedimental para analizar; guarda relación con el puntaje en conceptos fundamentales de analizar. Por lo que se puede visualizar que son similares.
- el coeficiente de correlación de Pearson = 0,893, indica una correlación positiva fuerte. Donde el puntaje de la capacidad procedimental para interpretar; guarda relación con el puntaje en conceptos fundamentales de interpretar. Por lo que se puede apreciar que son similares.

CAPÍTULO V: DISCUSIÓN, CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

5.1 Discusión

- En el gráfico comparativo de los conceptos fundamentales del cálculo y las capacidades procedimentales para calcular, analizar e interpretar se observa que el alumno obtuvo un puntaje mayor en la parte conceptual (conceptos fundamentales del cálculo) que en la práctica (desarrollo de capacidades procedimentales para calcular, analizar e interpretar) y en algunos casos se observa que el puntaje de la práctica se asemeja al de la teoría, lo cual también es justificado por el coeficiente de correlación de Pearson, que para este caso es 0,966.
- En el gráfico comparativo de los puntajes de la evaluación de los conceptos fundamentales del cálculo, relacionados a la capacidad de calcular y de la evaluación de la capacidad procedimental para calcular se puede visualizar que el alumno obtuvo un puntaje mayor en las preguntas de concepto que en las de práctica, de acuerdo a esta capacidad y en algunos casos estos puntajes se asemejan, por lo cual también es justificado por el coeficiente de correlación de Pearson, que para este caso es 0,872.

- En el gráfico comparativo de los puntajes de la evaluación de los conceptos fundamentales del cálculo relacionados a la capacidad de analizar y de la evaluación de la capacidad procedimental para analizar, se puede visualizar que el alumno obtuvo un puntaje mayor en las preguntas de concepto que en las de práctica; de acuerdo a esta capacidad y en algunos casos estos puntajes se asemejan, lo cual también es justificado por el coeficiente de correlación de Pearson, que para este caso es 0,932.
- En el gráfico comparativo de los puntajes de la evaluación de los conceptos fundamentales del cálculo relacionados a la capacidad de interpretar y de la evaluación de la capacidad procedimental para interpretar, se puede visualizar que el alumno obtuvo un puntaje mayor en las preguntas de concepto que en las de práctica; de acuerdo a esta capacidad y en algunos casos estos puntajes se asemejan, lo cual también es justificado por el coeficiente de correlación de Pearson, que para este caso es 0,893.
- *En la tesis "Evolución del perfil cognitivo, metacognitivo, actitudinal y de rendimiento en estudiantes con dificultades de aprendizaje en matemáticas: un estudio longitudinal"* citada en los antecedentes de esta tesis, los resultados que se obtuvieron fueron de alumnos con problemas para el aprendizaje en matemáticas, en tanto, en esta tesis se ha trabajado con una muestra de 60 alumnos de todo tipo, de los cuales se evidencia un porcentaje de aprobados mayor al 50%.
- Mientras que en la tesis: "*Estrategias de enseñanza de la resolución de problemas matemáticos. Fundamentos teóricos y metodológicos"*

mencionada en los antecedentes de este trabajo, se analizan las estrategias para la resolución de problemas matemáticos y se mencionan las fases que debe pasar un alumno para resolver un problema, en este proyecto de tesis, el alumno resuelve problemas relacionados al cálculo siguiendo las fases que se mencionan en el antecedente dado y emplea las estrategias que él considera conveniente.

- En la tesis "*Resolución de problemas matemáticos*", mediante ciertas herramientas los alumnos logran incrementar sus habilidades para resolver problemas de matemática, en esta tesis a lo largo de su vida estudiantil los 60 alumnos universitarios evaluados han logrado una serie de habilidades que les ha permitido a algunos resolver de manera exitosa las preguntas de cálculo mientras a otros no se les ha sido tan fácil.

5.2 Conclusiones

- Sustentado por los resultados, el p-valor es menor que 0.05, entonces rechazamos la hipótesis nula H0 y aceptamos la hipótesis H1: Los conceptos fundamentales del cálculo se relacionan significativamente con el desarrollo de capacidades procedimentales en la resolución de problemas de estudiantes universitarios. Por otra parte, el coeficiente de correlación de Pearson es 0,966, lo cual indica una correlación positiva muy fuerte.
- Sustentado por los resultados, el p-valor es menor que 0.05, entonces rechazamos la hipótesis nula H0 y aceptamos la hipótesis H2: Los conceptos fundamentales del cálculo se relacionan significativamente con el desarrollo de la capacidad procedimental para calcular en la resolución de problemas de estudiantes universitarios. Por otra parte, el coeficiente de correlación de Pearson es 0,872, lo cual indica una correlación positiva fuerte.
- Sustentado por los resultados, el p-valor es menor que 0.05, entonces rechazamos la hipótesis nula H0 y aceptamos la

hipótesis H3: Los conceptos fundamentales del cálculo se relacionan significativamente con el desarrollo de la capacidad procedimental para analizar en la resolución de problemas de estudiantes universitarios. Por otra parte, el coeficiente de correlación de Pearson es 0,932, lo cual indica una correlación positiva muy fuerte.

- Sustentado por los resultados, el p-valor es menor que 0.05. Entonces, rechazamos la hipótesis nula H0 y aceptamos la hipótesis H4: Los conceptos fundamentales del cálculo se relacionan significativamente con el desarrollo de la capacidad procedimental para interpretar en la resolución de problemas de estudiantes universitarios. Por otra parte, el coeficiente de correlación de Pearson es 0,893, lo cual indica una correlación positiva fuerte.

5.3 Recomendaciones

- Los resultados obtenidos dan paso a nuevas investigaciones, como a una tesis que consista en aplicar otras capacidades procedimentales para la resolución de problemas relacionados al cálculo y determinar dentro de las otras capacidades y las que ha empleado el alumno en este trabajo, qué capacidad tiene mejor desarrollada cada alumno.
- Así mismo, se podría hacer una tesis con respecto al seguimiento de las evaluaciones de los 60 alumnos calificados en este trabajo y determinar como el desarrollo de sus capacidades procedimentales para la resolución de problemas, van mejorando en el tiempo.

- En el ámbito matemático, con los resultados obtenidos se podría hacer una tesis para determinar la recta de ajuste o la curva de regresión exponencial con el método de mínimos cuadrados que mejor aproxima el conjunto de datos de las evaluaciones de los conceptos fundamentales del cálculo y las capacidades procedimentales de calcular, analizar e interpretar.

FUENTES DE INFORMACIÓN

- Acosta, G. (2013). Evolución del perfil cognitivo, metacognitivo, actitudinal y de rendimiento en estudiantes con dificultades de aprendizaje en matemáticas: Un estudio longitudinal. Tesis Doctoral, Universidad de Valencia, Valencia, España.
- Alvarado, V. (2011). Resolución de problemas matemáticos. Tesis de licenciatura, Universidad de Magallanes, Punta Arenas, Chile.
- Axler, S. Pré-Cálculo. (2016). Uma Preparação Para o Cálculo. Brasil: Livros Técnicos e Científicos Editora Ltda.
- Bernardes, M., Fernandes, R. y Boni, K. (2015). Cálculo Diferencial e Integral. (2da. ed.). Brasil: Editora e Distribuidora Educacional S.A.
- Contreras, L., Carrillo, J., Guerrero, A. y López, E. (2015). La resolución de problemas en los libros de texto: un instrumento para su análisis. Avances de Investigación en Educación Matemática, 8, 73-94.
- Curo, A. (2016). Matemática Básica para Administradores. (3ra. ed.). Lima: Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas.

- Dueñas, H. y Rubio, M. (2014). Cálculo diferencial de una variable. (2da. ed.). Bogotá, Colombia: Universidad Nacional de Colombia.
- Haeussler, E., Paul, R. y Wood, R. (2015). Matemáticas para administración y economía. (13ra. ed.). México: Pearson Educación Prentice Hall.
- Iriarte, A. (2011). Desarrollo de la competencia resolución de problemas desde una didáctica con enfoque metacognitivo. Zona Próxima, 15.
- Kelley W. (2014). O Guia Completo Para Quem Não É C.D.F - Pré-cálculo. (1ra. Ed.). Río de Janeiro, Brasil: Alta Books.
- Larson, R. y Edwards, B. (2016). Cálculo. (10ma. ed.). México, D.F.: Cengage Learning Editores.
- Pérez Yenny y Ramírez Raquel (2011). Estrategias de enseñanza de la resolución de problemas matemáticos. Fundamentos teóricos y metodológicos. Revista de Investigación, 73 (35).
- Ramirez, J. (2017). Estrategia didáctica solución de problemas y capacidades matemáticas en la UNFV 2017. Tesis magistral. Perú.

ANEXO

Anexo 1. Prueba de evaluación

A. PRIMERA PARTE (2p c/u)

1. Identifique el dominio y rango de una función dada.
2. Identifique en una gráfica los interceptos con los ejes coordenados.
3. Grafique una función constante, una lineal y una cuadrática.
4. Gráficamente exprese la idea de límites infinitos y límites al infinito.
5. Aplique 3 propiedades de límites.
6. Reconozca en un ejemplo de límite el límite indeterminado.
7. A través de un ejemplo identifique un tipo de discontinuidad.
8. Mediante un ejemplo identifique la asíntota vertical y oblicua.
9. De un ejemplo de función racional.
10. Grafique una función racional.

B. SEGUNDA PARTE

1. Determinar el valor de los siguientes límites: (1,5p c/u)

   (i) $\lim_{x\to e} \frac{x-e}{x^2-e^2}$

   (ii) $\lim_{x\to 0} \frac{x-e}{x^2-e^2}$

   (iii) $\lim_{x\to +\infty} \frac{x-e}{x^2-e^2}$

2. Sea la siguiente función: $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$.
   a. Determine todas las asíntotas e interceptos con los ejes coordenados. (2,0p)
   b. Trace su gráfica. (1,5p)

3. Sea f una función definida por $f(x) = \begin{cases} 2x-1\,; x<1 \\ -x^2+4x-2\,; 1<x\le 4 \\ -3\,; x>4 \end{cases}$
   a. Trace la gráfica de f. (1,5p)
   b. Calcule $\lim_{x\to 1} f(x)$ y $\lim_{x\to 4} f(x)$. (1,5p)
   c. ¿En qué valores presenta discontinuidades la función f? Clasifíquelas. (1,0p)
   d. Redefina la función, en donde sea posible, para que f sea continua. (0,5p)

4. Grafique una función f cuyo dominio sea $\mathbb{R}-\{2;3\}$ y que cumpla con las siguientes condiciones: (4,0p)
   - $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$

- $\lim_{x \to 2^-} f(x) = 2$
- $f(x) = (x-4)^2 + 1, x > 3$
- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -2^+} f(x) = -2$
- $f(-4) = f(-2) = f(0) = 0$
- $\lim_{x \to 3} f(x) = 2$

Indique el rango de f.

5. La oferta de cierto artículo se encuentra modelada por la función racional: $p = \frac{Aq+6}{Bq+2}$, donde A y B son valores constantes, p representa el precio en dólares por artículo y q representa las unidades ofrecidas (en cientos). Por limitaciones del mercado se espera que al ofrecer la mayor cantidad de artículos el precio tienda a un valor máximo de \$7,50.

    a. Determine los valores de las constantes A y B si al precio de \$6,75 se ofrecen 500 artículos. (2,0p)
    b. Haga un esbozo de la gráfica de la función racional y resalte el tramo que corresponde a la oferta. (1,5p)