FACULTAD DE CIENCIAS CONTABLES, ECONÓMICAS Y FINANCIERAS

SECCIÓN DE POSGRADO

MODELOS DE CUANTIZACIÓN ALGEBRAICA EN LOS MERCADOS FINANCIEROS DE CAPITALES

PRESENTADA POR

JAVIER MARCELO HUARCA OCHOA

TESIS

PARA OPTAR EL GRADO ACADÉMICO DE DOCTOR
EN CONTABILIDAD Y FINANZAS

LIMA – PERÚ

2015

FACULTAD DE CIENCIAS CONTABLES, ECONÓMICAS Y FINANCIERAS

SECCIÓN DE POSTGRADO

MODELOS DE CUANTIZACIÓN ALGEBRAICA EN LOS MERCADOS FINANCIEROS DE CAPITALES

TESIS PARA OPTAR EL GRADO ACADÉMICO DE DOCTOR EN CONTABILIDAD Y FINANZAS

PRESENTADA POR:

JAVIER MARCELO HUARCA OCHOA

LIMA, PERÚ

2015

MODELOS DE CUANTIZACIÓN ALGEBRAICA EN LOS MERCADOS FINANCIEROS DE CAPITALES

ASESOR Y MIEMBROS DEL JURADO

ASESOR:

Dr. Luis Alberto Lizárraga Pérez

PRESIDENTE DEL JURADO:

Dr. Juan Amadeo Alva Gómez

MIEMBROS DEL JURADO:

Dr. Augusto Hipólito Blanco Falcón.

Dr. Luis Alberto Lizárraga Pérez.

Dr. Virgilio Wilfredo Rodas Serrano.

Dr. Luis Miguel Suarez Almeida.

DEDICATORIA

A Amadeo y Teresa, mis padres, por darme la vida y protección eterna, a quienes guardo un profundo sentimiento y gratitud.

El Autor

AGRADECIMIENTO

Al Dr. Luis Alberto Lizárraga Pérez, mi asesor, quién contribuyó en la elaboración de esta tesis.

A la Universidad de San Martín de Porres y a sus docentes de la Unidad de Pre y Post Grado, por transmitirme los conocimientos que hoy llevo en mi memoria.

A mis honorables jurados, que aportaron para el perfeccionamiento de esta tesis.

A Dios, por ser fuente inspiracional y revelarme los misterios de la ciencia.

El Autor

ÍNDICE

MODELOS DE CUANTIZACIÓN ALGEBRAICA EN LOS MERCADOS FINANCIEROS DE CAPITALES

RESUMEN

La presente investigación tiene el objetivo principal construir los Modelos de Cuantización Algebraica $(\mathcal{M}, \mathfrak{B}, \mathfrak{Q})$ y determinar su influencia en el análisis de los Mercados Financieros de Capitales (MFC), con el propósito de aportar una herramienta financiera para explorar, diagnosticar, controlar y prever la "volatilidad" de los mercados financieros globalizados. Como objetivos secundarios se plantean: precisar si el típo de álgebra $\mathfrak{A}$ de los modelos de cuantización es determinante en la caracterización del proceso vectorial estocástico $\mathbb{X}(u, t)$ de los mercados financieros; determinar que el homomorfismo, Φ de las álgebras $\mathfrak{A}$ y $C^{\infty}(\mathfrak{M})$ de los modelos de cuantización, describe el riesgo y el rendimiento de las tasas de retornos Ξ y Δ de los MFC; diagnosticar si el espacio fase de los modelos de cuantización algebraica influyen en el análisis de la volatilidad Θ de los mercados financieros; mostrar cómo las operaciones de desplazamiento paralelo e involuciones de los modelos de cuantización determínan la fibración geométrica de los mercados financieros; y, finalmente, identificar las propiedades topológicas de los modelos de cuantización algebraica que describen la aleatoriedad de los MFC.

Presentamos resultados generales y particulares de utilidad financiera a partir de la formalización y evaluación del modelo $(\mathcal{M}, \mathfrak{B}, \mathfrak{Q})$. Asimismo, mostramos aplicaciones concretas de carácter evaluativo y descriptivo-correlacional en los mercados financieros en comparación con resultados de otros modelos financieros tradicionales. Usamos el software matemático MAPLE para manipular y graficar los datos obtenidos de algunas bolsas de valores importantes que involucran a los MFC.

Palabras Claves:

Mercados Financieros de Capitales

Espacios Fibrados

Cuantización algebraica.

ALGEBRAIC QUANTIZATION MODELS IN THE FINANCIAL CAPITAL MARKETS

ABSTRACT

The present investigation takes as a main objective to construct Models of Algebraic Quantization $(\mathcal{M}, \mathfrak{B}, \mathfrak{Q})$ and to determine their influence in the analysis of Financial Markets of Capitals (FMC), with the purpose of giving a financier tool to explore, diagnose, control and prevent the 'volatility' of globalized financial markets.

As secondary objectives we set up: to precise if the type of algebra $\mathfrak{A}$ of the models of quantization is determinant in characterization of the vector stochastic process $\mathbb{X}(u,t)$ of the FMC; to determine how the homomorphism Φ of the algebras $\mathfrak{A}$ and $C^\infty(\mathfrak{M})$ of the models of quantization descrive the risk and the yield of the valuations of the rate of return Ξ and Δ of the FMC; to diagnose if the phase space of the models of algebraic quantization influence in the analysis of the volatile nature of the financial markets; to show how the parallel displacement operations and involutions of the models of quantization determine the fibred geometry structure of the FMC; and finally to identify the topological properties of the algebraic quantization models that describe the randomness of the financial markets.

We give general and particular results of financial markets from the formalization and evaluation of the models $(\mathcal{M}, \mathfrak{B}, \mathfrak{Q})$. Concrete evaluative, descriptive-correlational applications to the financial markets are presented, comparatively with results of other financial traditional market models. We use the mathematical software MAPLE to manipulate and trace the graphs of the data obtained from important stocks exchanges that involve globalized financial markets.

Key Words:

Financial Markets of Capitals

Fiber Bundle Spaces

Algebraic quantization

MODELOS DE CUANTIZAÇÃO ALGÉBRICA EM OS MERCADOS FINANCEIROS CAPITAIS

RESUMO

O trabalho presente da investigação tem como objetivo principal construir os modelos da quantização algébrica $(\mathcal{M}, \mathfrak{B}, \mathfrak{Q})$ e determinar sua influência na análise dos mercados financeiros de capitais (MFC), com a intenção de dar uma ferramenta financeira para explorar, diagnosticar, controle e evitar a 'volatilidade' dos mercados financeiros abrangidos. Como os objetivos secundários estabelecemo-nos: precisa se o tipo da álgebra $\mathfrak{A}$ um dos modelos da quantização é um factor determinante na caraterização do processo estocástico vetorial $\mathbb{X}(u;t)$ dos MFC; determinar se o homomorfismo Φ da álgebra um dos modelos de quantização eles descrevem o risco e o rendimento das avaliações da taxa de retorno Ξ e Δ dos mercados financeiros; precisar se a fase espacial dos modelos de quantização algébrica eles influem na análise da natureza volátil dos MFC; mostrar como as operações de transporte paralelas e as involuções dos modelos da quantização determinam a fibra embrulha a estrutura de geometria do MFC; e finalmente identificar as propriedades topológicas dos modelos de quantização algébricos que eles descrevem a aleatoridade dos mercados financeiros.

Damos resultados gerais e particulares da utilidade financeira a partir da formalização do modelo $(\mathcal{M}, \mathfrak{B}, \mathfrak{Q})$. Aplicações concretas dos modelos da quantização algébrica nos mercados financeiros eles são apresentados, comparativamente com resultados de outros modelos tradicionais financeiros. Nos usamos o software matemático MAPLE para manipular e traçar os gráficos dos dados obtidos a partir de principais bolsa de valores que envolvem mercados financeiros abrangidos.

Palavras-chave:

Mercados Financeiros de Capitais

Espaços de Pacote de Fibra

Quantização algébrica

INTRODUCCIÓN

El comportamiento volátil del sistema dinámico de la economía financiera ha llamado la atención de muchos investigadores en los últimos tiempos, debido a que se ha tornado complejo por efecto de la alta correlación entre la globalización de los mercados financieros, actividades erróneas de carácter humano, la migración, las decisiones políticas, la degradación del medio ambiente y el cambio organizacional en la administración de los mercados financieros. En tal sentido, ningún modelo financiero actual, ni el desarrollo vertiginoso de la tecnología, hacen posible su control, administración y prevención.

Frente a esta realidad, proponemos la tesis denominada "Modelos de Cuantizacón Algebraica en los Mercados Financieros de Capitales" (MFC), que se planteó sobre la siguiente pregunta de investigación: ¿De qué manera los modelos de cuantización algebraica influyen en el análisis de los MFC?. La presente investigación tiene por objetivo principal construir los modelos de cuantización algebraica y determinar su influencia en la explicación del comportamiento caótico de los MFC.

La idea geométrica detrás de la construcción de estos modelos está basado en la formación de la triada $(\mathcal{M}, \mathfrak{B}, \mathfrak{Q})$ (los vértices de un triángulo) de séxtuplas. Esta estructura, fundamentalmente, es la integración de: un ambiente físico $\mathfrak{B}$, el **'teatro'** (los espacios topológicos fibrados con toda su artilleria conceptual de *principios ambientales* de intercambio financiero); los **'actores'** (los mercados financieros $\mathcal{M}$ que son los *elementos*); y el **'espiritu abstracto'** (la cuantización $\mathfrak{Q}$ de los modelos). La integración de estos tres elementos, tres disciplinas científicas, dan a luz a una herramienta físico-matemático-financiera de utilidad y aplicación financiera.

Asimismo, la investigación tiene por objetivos específicos: precisar que el tipo de álgebra $\mathfrak{A}$ del modelo de cuantización algebraica influye al proceso vectorial estocástico $\mathbb{X}(u, t)$

de los MFC ; mostrar que el homomorfismo Φ de las álgebras $\mathfrak{A}$ y $C^\infty(\mathfrak{M})$ de los modelos de cuantización algebraica describe la variación del riesgo y del rendimiento de las tasas de retornos Ξ y Δ de los MFC; demostrar que el espacio fase del modelo de cuantización influye en el análisis de la volatilidad de los MFC; explicar que las operaciones de desplazamiento paralelo e involuciones del modelo de cuantización algebraica determinan la fibración geométrica de los MFC y, finalmente, identificar que las propiedades topológicas de los modelos de cuantización algebraica describen la aleatoriedad de los MFC. Estos objetivos son establecidos y demostrados en el teorema 2.3.1.

La sustancialidad de los objetivos está sustentada por la existencia de hechos concretos reales (figura en pag. 3) de que los mercados financieros están expuestos al efecto de la ocurrencia de las crísis financieras[1] mundiales que azotaron, y continuarán azotando, imprevisiblemente como un virus "contagioso" al mundo financiero en el planeta, si es que no desarrollamos rápidamente herramientas robustas para explorar, controlar y prever la volatilidad caótica de los MFC globalizados.

La investigación se ha desarrollado sobre una base de cinco capítulos: el primero, trata del planteamiento del problema de investigación, que comprende a su vez, la descripción de la realidad problemática, delimitación de la investigación, la formulación del problema en sí, precisando sus objetivos, su justificación e importancia, así como las limitaciones y viabilidad del estudio respecto a los modelos de cuantización algebraica de los MFC.

En el Segundo Capítulo, presentamos el Marco Teórico, alcanzando los antecedentes de la investigación, la base teórica, las definiciones conceptuales y la hipótesis de la investigación. Asimismo, se detalla la construcción de los modelos de cuantización algebraica al amalgamar sus tres elementos fundamentales y el análisis de los observables

[1] Por remencionar algunos colapsos incontrolables de crísis financieras mundiales más grandes ocurridas desde 1980, como el Lunes Negro de 1987, la crísis Rusa de 1998, la explosión de la Burbuja Dot Com del 2001 y la más reciente crísis Hipotecaria del 2008 en los EEUU y las actuales de la UE.

que generan el tipo de álgebra definidas en el espacio de funciones sobre una variedad; los espacios fibrados y sus propiedades; los mercados financieros y sus caracteristicas. Este capitulo, es el sustento y el embrión del cuarto capítulo.

El Tercer Capítulo explica la metodología empleada, el enfoque y alcance de la investigación, tal como el diseño metodológico, la población y muestras, operacionalización de variables, las técnicas de recolección de datos principalmente a través de la observación de datos históricos de distintas bolsas de valores, técnicas para el procesamiento y análisis de datos, para lo cual se utilizaron las técnicas estadísticas y evaluación del modelo $(\mathcal{M}, \mathfrak{B}, \mathfrak{Q})$ a fin de analizar la conducta volátil de los MFC.

En el Cuarto Capítulo se muestran los resultados de la investigación. Estos resultados son las respuestas a las interrogantes planteadas en la formulación del problema y de la evaluación del modelo construido y su comparación con resultados mostrados al evaluar otros modelos tradicionales de los MFC. Los datos utilizandos aquí son datos históricos de los índices de tasas que influyen en la 'volatilidad'de los mercados financieros, para lo cual se ha utilizado el software matemático MAPLE.

Finalmente, en el Quinto Capítulo presentamos ciertas discusiones, conclusiones y recomendaciones en función a las hipótesis y a los resultados de los objetivos que fueron planteados en la investigación.

Esperamos que la presente tesis, titulada ”Modelos de Cuantización Algebraica en los MFC”, sea una propuesta metodológica útil para los inversionistas para explorar, predecir, controlar y prever la conducta cambiante de los mercados financieros de capitales, para los mercados financieros globalizados, a fin de diagnosticar un punto crítico, antes de la ocurrencia de una crísis financiera. Así, estos modelos serán una herramienta más para el desarrollo social, económico y científico de los MFC de un país.

CAPÍTULO I

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1. Descripción de la Realidad Problemática

En la mayoría de los modelos tradicionales de mercados financieros, como por ejemplo, el CAPM (Capital Asset Pricing Model: Modelo de valuación de activos) y el APM (Asset Pricing Model: Modelo de valuación de precios de arbitraje) y otros, no existen aspectos que involucren cuantización, simetrías de medición, desplazamiento paralelo de variación y covariación con trayectorias homotópicas, de tasas de rendimientos y de precios de activos en los mercados financieros, especialmente si ponemos atención a los aspectos de teoría de grupos y álgebras de activos financieros.

Por otro lado, actualmente no existen modelos cuantizados[2] para mitigar la conduc-

[2] En el mundo de los modelos cuantizados reina la incertidumbre tal como ocurre en el mundo estructural de los mercados financieros, pero el cuántico es más ventajoso. Ver sec. 2.2.3.

ta volátil de los mercados financieros en épocas de crísis y dispersión de contagio de bancarrota financiera entre ellos. Por ello, está demostrado que frente a la rapidez de ocurrencia y repercusión de contagio todos los modelos conocidos de prevención y control de sistemas financieros globales, son frágiles y, asimismo, los líderes de negocios, frente a una variedad de hechos cambiantes, tales como: los cambios ambientales, la migración, las decisiones políticas, el fracaso del estado de derecho, la explosión demográfica en el planeta, los sistemas de competencias entre los mismos mercados, no tienen las herramientas financieras suficientes y necesarias en la toma de decisiones inmediatas para remediar la infección entre los mercados financieros.

> "Ni los gobiernos ni las instituciones internacionales
> están preparados para lidiar con un colapso financiero
> sistémico". ***Harvad Business Review, Sep. 2011.***

Prueba de esto y aseveración son las grandes crisis financieras ocurridas en el pasado que dejaron notorias desolaciones, pánicos, inestabilidad económica, desocupación, entre otros efectos, en la humanidad, como testifican las figuras 1.1 a 1.7. En el contexto de esta realidad problemática latente y real, planteamos las siguientes preguntas ¿Cuál podría ser una alternativa robusta de prevención para evitar estos colapsos financieros?. ¿Podrán los modelos de cuantización algebraica de mercados financieros de capitales, darnos una luz de descubrir una metodología alternativa de prevención y control de la volatilidad de los mercados finacieros?. Planteamiento que contestaremos durante el desarrollo de esta investigación.

Puntualizamos ejemplos reales de esta problemática con hechos concretos de colapsos financieros imprevisibles e incontrolables mundiales ya ocurridas en distintos lugares del planeta desde 1929 hasta el 2008. Como se recuerda, el Lunes Negro de 1987, la crísis

Muestras de las Crisis Financieras Mundiales ocurridas en el pasado.

Figura 1.1: La caida de Wall Street

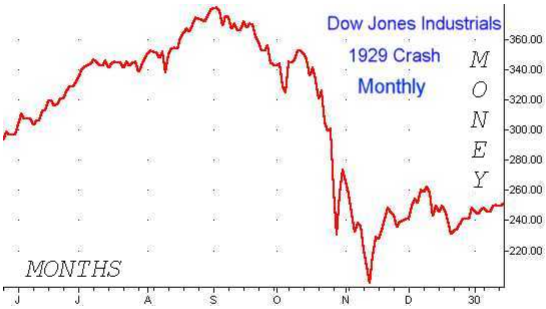


Figura 1.2: La BV Dow Jones 1929

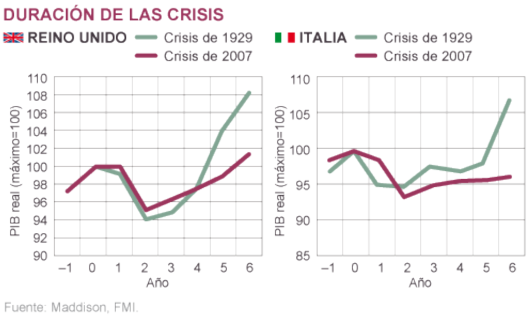


Figura 1.3: La crísis del R. Unido e Italia

Figura 1.4: Expansión de crísis contagiosa

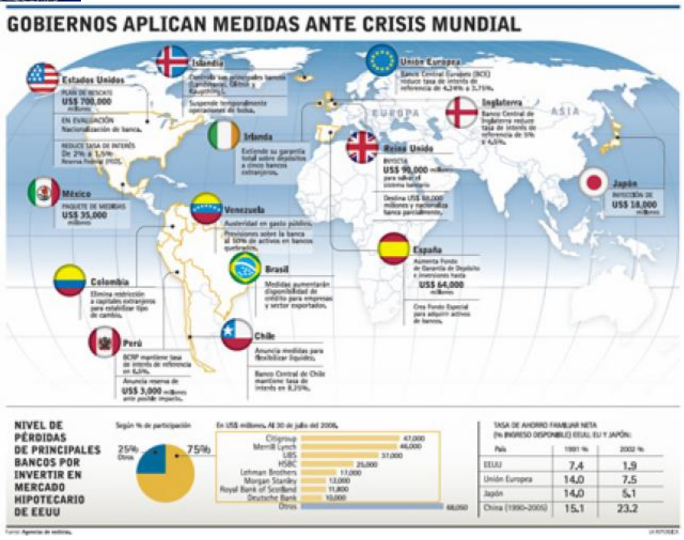


Figura 1.5: Goviernos enfrentan a la crísis

Figura 1.6: La BV Dow Jones 1929

Figura 1.7: La crísis Subprime del 2008

Rusa de 1998, la explosión de la Burbuja Dot Com del 2001 y la más reciente crísis hipotecaria del 2008 en los EEUU y los actuales de la UE nos motiva a enfrentar esta problemática y pensar que es necesario determinar una nueva metodología robusta para analizar la dinámica "volátil"de los mercados financieros que ayuden a diagnosticar y prever los factores internos y externos que distorsionan la evolución y desarrollo armónico[3] del sistema global de los mercados financieros actuales y, probablemente, en las próximas décadas.

Frente a la carencia o desconocimiento de metodologías de auxilio por las instituciones financieras locales, nacionales e internacionales, para mitigar estas emergencias contagiosas[4] de bancarrota financiera, provocadas por fenómenos epidémicos[5] estocásticos complejos explicados por una familia de variables aleatorias, proponemos en esta tesis la construcción y aplicación de modelos de cuantización algebraica como una herramienta matemática financiera de utilidad econo-financiera, que explica la conducta de los mercados financieros globalizados en un ambiente distinto de espacio y tiempo a los ya existentes.

Fundamentalmente, se trata de la construcción de modelos de cuantización algebraica para contestar principalmente la interrogante: ¿De qué manera los modelos de cuantización algebraica influyen en el análisis de los mercados financieros de capitales?. Es decir, ¿ de qué manera los modelos de cuantización algebraica podrían ser usados para diagnosticar, administrar y prever eficazmente la volatilidad de los mercados financieros y evitar colapsos financieros?.

Formalizamos esta metodología de modelamiento y análisis, inicialmente de nivel ex-

[3] Mercado donde predomína el áuge de ganacias, sin crísis financiera.

[4] King M. and Wadhwanni S. (1989) *Transmission of volatility between stock markets*, National Bureau of Economic Research, Paper Series 2910.

[5] Mathieu Mosolonka-Lefebvre, “Epidemics in markets with trade friction and imperfect transactions”, (Oct, 2013), arXiv:1310.6320V1[q-bio.PE].

ploratorio, con profundo rigor matemático conllevando a establecer su propia teoría intrínseca fundamentada por reglas de intercambio con transporte paralelo entre activos financieros observados en el tiempo sobre espacios fibrados.

Específicamente, requiere precisar si la clase de álgebra elegido en el proceso de cuantización es determinante en la caracterización del proceso vectorial estocástico de los mercados financieros; determinar si el homomorfismo Φ entre las álgebras de la cuantización explica el riesgo y el rendimiento de las tasas de retornos de los mercados financieros; precisar como los observables clásicos y los observables cuánticos involucrados en la pre y post construcción de los modelos de cuantización algebraica influyen en el análisis de la volatilidad de los mercados financieros; demostrar que las operaciones de desplazamiento paralelo e involuciones determinan la estructura geométrica fibrada de los mercados financieros; y, finalmente, queremos identificar las propiedades topológicas de los modelos de cuantización algebraica que influyen a los modelos aleatorios de los mercados financieros.

Más general, esta investigación podría denominarse cuantización de los mercados financieros (en particular, modelos de cuantización algebraica de los mercados financieros de capitales) y presentar en varios aspectos propiedades correlacionales y descriptivas algebraicamente, con interpretación financiera, en un marco panorámico geométrico de los mercados financieros enfocados desde distintos puntos de vista y analizados mediante estructuras de deformaciones algebraicas complejas que conllevan a enunciar, demostrar y aplicar importantes teoremas como leyes generales del comportamiento de los mercados financieros que, a una primera mirada, nos muestran su geometría fibrada entrelazados y conexos con una infinidad de transformaciones de intercambio financiero, en un sistema dinámico de un conjunto de activos financieros que forman clases de equivalencia sobre espacios vectoriales de activos dando lugar a la conocida e intrigante teoría de portafolios desarrollada en un ambiente cuántico sobre variedades de Poisson que, en su composicón, forman una estructura topológica fibrada.

Si los objetivos de esta investigación se convierten en hipótesis verdaderas habremos abierto una nueva brecha de estudio para la prevención de la conducta volátil de los mercados financieros, en particular de los mercados financieros de capitales estudiadas por las ciencias contables, económicas, administrativas y financieras.

1.2. Delimitación de la Investigación

Luego de haber descrito la problemática relacionada al tema de investigación elegido, a continuación, con fines metodológicos, el estudio será delimitado en los siguientes aspectos:

1.2.1. Delimitación Espacial

La construcción, evaluación, análisis e interpretación de los modelos de cuantización algebraica se formulan a nivel general, del que se deducen casos especiales y aplicaciones particulares de mercados financieros suscritos a Bolsas de Valores Internacionales que tomamos como marco de trabajo. Es decir, delimitamos nuestro estudio a nivel jerárquico de los modelos CAPM (Capital Asset Pricing Model: Modelo de valuación de activos) [43] cap 10, el APM (Arbitrage Pricing Model: Modelo de fijación de los precios de arbitraje) [31], Modelos Binomiales en Finanzas [36], y otros, que son modelos financieros de organizaciones globales aceptados y aplicados mundialmente.

1.2.2. Delimitación Temporal

El estudio es de tipo longitudinal en el tiempo y el periodo de la planificación y desarrollo de la tesis comprendió los meses de Marzo 2012 hasta Enero 2015.

1.2.3. Delimitación Social

Las técnicas destinadas a la recolección de datos originales serán aplicadas a la información procedente de Bloomberg[6], como: Dow Jones, NASDAG, S& P de la Bolsa de Nueva York, FTSE 100 (Londres), el Banco Mundial, el Fondo Monetario Internacional, la Bolsa de Valores del Perú y otras. Estas entidades financieras son seleccionadas porque se consideran instituciones globalizadas, de credibilidad, que captan y almacenan las observaciones reales cuantitativas y cualitativas de las variaciones de sus activos en el tiempo e índices de sus mercados de capitales importantes.

1.2.4. Delimitación Conceptual

Para el desarrollo de la investigación se utilizaron conceptos interdisciplinarios de la física, la matemática y las finanzas. Concretamente, los ingredientes conceptuales necesarios para la construcción de los modelos de cuantización algebraica de los mercados financieros de capitales son las frases claves involucradas en el título de la investigación: cuantización algebraica, mercados financieros de capitales, y otros conceptos intermitentes, como series formales, álgebras y variedades de Poisson, espacios topológicos

[6] Base de datos de mercados financieros internacionales que recopila los índices de variación de las bolsas de valores más importantes en el mundo.

fibrados y sus propiedades intrínsecas de significado financiero, producto estrella, $\star$, y otras definiciones conceptuales importantes necesarias y suficientes para el fundamento teórico del tema.

Con estos conceptos y el método científico hemos procedido a la construcción y formalización de los modelos de cuantización algebraica de los mercados de capitales que detallamos en el Capítulo II sección 2.4 del marco teórico.

En resumen, el desarrollo de la investigación requiere fundamentalmente tres ingredientes conceptuales, uno por cada disciplina:

1. Finanzas: $\mathcal{M} \longleftarrow$ mercados financieros
2. Matemática: $\mathfrak{B} \longleftarrow$ espacios fibrados
3. Física: $\mathfrak{Q} \longleftarrow$ quantización algebraica

Al integrar estos conceptos en el ambiente de las tres disciplinas mencionadas producirán los modelos de cuantización algebraica de mercados financieros de capitales, que denotamos por:

$$(\mathcal{M}, \mathfrak{B}, \mathfrak{Q}) \tag{1.1}$$

y para la operacionalización de sus variables y evaluación de la performance de estos modelos se requieren índices de variación de los estados financieros de empresas afiliadas a las bolsas de valores y datos originales históricos y actuales, datos estadísticos y otros conceptos y documentos relacionados al título de la tesis.

1.3. Formulación del Problema

1.3.1. Problema Principal

¿De qué manera, los modelos de cuantización algebraica, influyen en el análisis de los mercados financieros de capitales?

1.3.2. Problemas Específicos

1. ¿De qué manera, el tipo de álgebra $\mathfrak{A}$ de los modelos de cuantización algebraica, influye al proceso vectorial estocástico $\mathbb{X}(u,t)$ de los mercados financieros?
2. ¿En qué medida, el homomorfismo Φ de las álgebras $\mathfrak{A}$ y $C^{\infty}(\mathfrak{M})$ de los modelos de cuantización, explica la variación del riesgo y el rendimiento de las tasas de retornos Ξ y Δ de los mercados financieros?
3. ¿ De qué manera, los espacios fases de configuraciones de los modelos $(\mathcal{M},\mathfrak{B},\mathfrak{Q})$ influyen en el análisis de la volatilidad Θ de los mercados financieros.
4. ¿Cómo las operaciones de desplazamiento paralelo e involuciones de los modelos de cuantización algebraica determinan las fibraciones geométricas de los mercados financieros?
5. ¿De qué manera, las propiedades topológicas de los modelos de cuantización algebraica, describen la aleatoriedad de los mercados financieros?.

1.4. Objetivos de la Investigación

1.4.1. Objetivo Principal

Determinar y demostrar que los modelos de cuantización algebraica influyen en el análisis de los mercados financieros de capitales.

1.4.2. Objetivos Específicos

1. Precisar que el típo de álgebra $\mathfrak{A}$ de los modelos de cuantización algebraica influye en el proceso vectorial estocástico $\mathbb{X}(u,t)$ de los mercados financieros.

2. Determinar que el homomorfismo Φ entre las álgebras $\mathfrak{A}$ y $C^{\infty}(\mathfrak{M})$ de los modelos de cuantización explica la variación del riesgo y el rendimiento de las tasas de retornos Ξ y Δ de los mercados financieros.

3. Precisar cómo los espacios fases de configuraciones de los modelos $(\mathcal{M}, \mathfrak{B}, \mathfrak{Q})$ influyen en el análisis de la volatilidad Θ de los mercados financieros.

4. Mostrar que las operaciones de desplazamiento paralelo e involuciones de los modelos de cuantización algebraica determinan las fibraciones geométricas de los mercados financieros.

5. Identificar las propiedades topológicas de los modelos de cuantización algebraica que describen la aleatoriedad de los mercados financieros.

1.5. Justificación e Importancia de la Investigación

1.5.1. Justificación

El trabajo de investigación se justifica por las siguientes razones:

- Como hemos establecido en las secciones 1.1 y 1.2 los modelos actuales de índole económico-financiero y en particular de los mercados financieros de capitales tienen ciertas limitaciones para diagnosticar, prever, pronosticar y controlar su volatilidad. Pruebas concretas de ésto, son la imposibilidad de prever y anticipar las sorpresivas crisis mundiales ocurridas en el pasado (ver Fig. 1.1 a 1.7 pag. 3) y las que vendrán en las siguientes décadas, si no se previene y controla el dinamismo local y global de los sistemas de cambio volátil de los mercados financieros mediante los modelos de cuantización algebraica.
- Los modelos de cuantización algebraica serán de hecho una herramienta matemática alternativa, distinta a las ya existentes, de utilidad económica financiera y contable que podrían pronosticar y explicar la conducta de los cambios repentinos de los mercados financieros globalizados puesto que son diseñados y contruidos en un ambiente distinto de espacio y tiempo a los conceptos clásicos. Este modelamiento, que inicialmente es explorativo y descriptivo, se concretiza con profundo rigor matemático, e inicia, motiva e introduce un nuevo formalismo de mirar y analizar al mundo financiero en un ambiente cuántico y posiblemente ofrece un nuevo campo importante y fructífero de investigación.
- Una ponderación fuerte que justifica el propósito de esta investigación es su con-

tenido técnico, su originalidad y de alcance universal, cuya gran utilidad podría extenderse para el estudio de la previsión de contagio de crísis entre los mercados financieros.

- Los resultados de la investigación permitirán alcanzar a los interesados en esta materia, las repercusiones que tienen los modelos de cuantización para entender el comportamiento de los mercados financieros de capitales de una economía globalizada.

1.5.2. Importancia

En la construcción formal de los modelos de cuantización algebraica de los mercados financieros de capitales se ve con claridad la integración de las cuatro disciplinas fundamentales del desarrollo humano: la matemática, física, economía, y las finanzas. Este hecho, por si mismo, nos dice que los modelos de cuantización algebraica son herramientas de metodología científica matemática de alcance generalizado y su importancia utilitaria será la aplicación en las ciencias financieras, las ciencias contables, la economía y otras ciencias afines de negocios.

1.6. Limitaciones del Estudio

La cuantización es un proceso físico-matemático y, por lo tanto, la conceptualización del modelo de cuantización algebraica no tiene limitaciones geográficas en su validez conceptual, de aplicabilidad, doctrinaria y filosófica. Es decir, el estudio es generalizado sobre organizaciones financieras globalizadas, con la salvedad que sus aplicaciones se pueden limitar a casos específicos en una determinada entidad, región o país, como por ejemplo en la Bolsa de Valores de Lima (BVL), la Bolsa de Valores de Nueva York (Dow Jones, NASDAQ, S&P)[7], la Bolsa de Valores de Londres (FTSE 100), etc.

Sin embargo, una limitación que podría ocurrir en el desarrollo de la investigación podría referirse a la obtención de la información de las instituciones financieras, debido a que existe cierta confidencialidad en el manejo de información en algunos centros financieros; pero toda vez que la investigación refleje futuros beneficios a la sociedad financiera mundial logramos facilidades de acceso y obtención de datos registrados que informan sobre el aspecto bursátil y la volatilidad de los mercados financieros.

Estos modelos podrían construirse para cualquier tipo de mercado, pero debido al carácter exploratorio y objetivo del título de la tesis, dejamos este aspecto de estudio y nos enfocamos únicamente a los mercados financieros de capitales.

1.7. Viabilidad del Estudio

Como es natural, el estudio y obtención de materiales para la investigación requiere financiamiento, lo cual sí se dispuso del recurso que es propio del investigador para la recolección, procesamiento y análisis de material bibliográfico y de datos que sirvieron para la verificación de la funcionalidad del modelo construido. La política de apoyo y cooperación de los participantes, útil para la evaluación de la metodología dependió de los convenios del investigador con las instituciones donde se aplicará el modelo desarrollado que, como tesista y la orientación recibida de los asesores, solidificaron la experiencia que tengo en investigación y considero que la realización de esta tesis fue intrigante, factible y a la vez viable.

[7] Dow Jones inició en 1884 y en 1896 Charles Dow introdujo el concepto de “Industrial Average”. NASDAQ: National Association of Security Dealers Automated Quotation, fue fundado en 1971.

CAPÍTULO II

MARCO TEÓRICO

2.1. Antecedentes de la Investigación

Una preocupación actual de una gran parte de la humanidad es la conservación sustentable en el largo plazo del capital de los mercados financieros, puesto que está demostrado que estos mercados son motores de creación de riqueza. Pero, si en las próximas décadas los mercados financieros siguen funcionando como en los últimos treinta años, las turbulencias financieras ocurridas en los periodos pasados se repetirán, pero con mayor intensidad, y conllevarán a un grave colapso del sistema financiero global. Este derrumbe financiero será catastrófico que ningún modelo financiero actual, ni el desarrollo vertiginoso de la tecnología, harán posible el control volátil y ”contagioso“ de estos mercados financieros.

Estas crisis financieras ocurridas en el pasado traen como consecuencia la realización de muchos estudios e investigaciones durante y después de la ocurrencia de cada crisis financiera concluyendo que la alta volatilidad de los mercados está directamente conexa a la correlación fuerte entre ellos [44].

Sin embargo, a pesar de estas numerosas investigaciones aún no se ha encontrado la herramienta perfecta para remediar colapsos financieros, tal es así, que en consultas realizadas a nivel de las facultades de la Universidad de San Martin de Porres y otras universidades del Perú y sus unidades de post grado y universidades internacionales, no existen publicaciones en revistas especializadas, tesis, monografías, tanto en contabilidad, como en economía y finanzas, que hayan enfocado específicamente esta problemática vía modelos de cuantización algebraica de mercados financieros de capitales.

Basándonos en estas premisas, consideramos que el trabajo de investigación realizado reúne las condiciones metodológicas y temáticas suficientes para ser considerado como inédito u original.

Lo que sí se ha determinado es la existencia abundante de estudios e investigaciones generales y especializados, separadamente, de los términos que integran la variable independiente (modelos de cuantización algebraica) como son: cuantización y cuantización por deformación. Similarmente, de los términos que integran la variable dependiente (mercados financieros de capitales) como son: mercados y mercados de capitales que amalgamados conforman el título de esta tesis.

Mencionamos a los más recientes:

En la última década, los **mercados financieros** han sido estudiados, desde el punto de vista geométrico y desde el punto de vista de la física y la matemática, por distintos autores, por instancia, [41] Piotrowsky E. y Sladkowski J., en el año 2006 publican un documento sobre la “Geometría de los Mercados Financieros”, en el que presentan un modelo de los mercados financieros desde el punto de vista de teoría de la información y haciendo uso de las herramientas de la geometría proyectiva lograron interesantes interpretaciones financieras de las métricas establecidas en su investigación.

Otras referencias de estudios de los MF, que se pueden consultar, utilizadas en nuestra investigación son [2], [3], [4], [6], [8], [9], [11], [15], [16], [17], [18], [19, 20], [22, 23], [24], [25], [27, 28], [29, 30, 31, 32], [33], [34], [35], [36], [43], y recientemente publicaciones sobre las crísis financieras mundiales [44].

2.1.1. Marco Histórico

El desarrollo evolutivo del concepto de **cuantización**, caso especial cuantización por deformación o también llamado cuantización algebraica aparece en el tiempo gradualmente, con las pruebas de la existencia del producto $\star$ (producto estrella) en niveles progresivos de generalidad, como se muestra en la Figura 2.8.

En 1970 se probó la existencia de los productos[8]-$\star$, como el Producto $\star$ de Moyal sobre variedades simplécticas. Al inicio de 1980 fue probada la existencia del producto $\star$ para una clase más extensa de variedades simplécticas (VS) y finalmente en 1993-94 se estableció que toda variedad simpléctica podría ser cuantizada (TVSC), en particular una variedad de Poisson.

Más aún, resultados más generales fueron obtenidos por métodos cohomológicos, [37] [38]. Con las herramientas de los métodos cohomológicos a mediados de los años 70 se demostró la existencia de productos $\star$ para variedades simplécticas cuyo grupo de

[8] Un producto $\star$ no conmutativo es equivalente a una deformación formal del álgebra $\mathcal{A} = C^\infty(M)$ definida sobre una variedad de Poisson M.

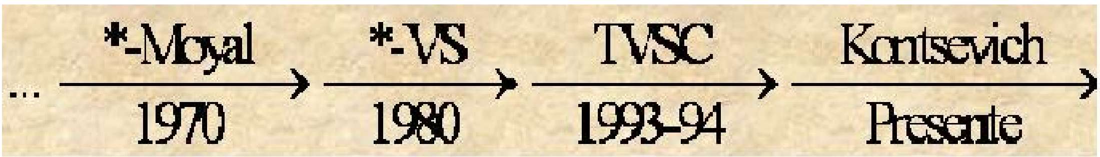


Figura 2.8: Evolución del concepto de cuantización.

homología de tercer nivel es el trivial.

Adicionalmente, sobre el concepto de **cuantización algebraica**, existe una diversidad de referencias bibliográficas en el área de la matemática y la física cuántica y también algunas relacionadas a las ciencias financieras, como: [1], [5], [7], [10], [12, 13, 14], [26], que muestran las contribuciones transcendentales de la física cuántica en las ciencias financieras. Así mismo, se ha determinado que existen algunas investigaciones recientes relacionadas a los términos del título de la tesis como se puede ver en [3], [21], [37, 38], [42], [45], [47], [48].

Una generalización más completa, del producto $\star$, fue lograda por la construcción de Fedosov que demostró que el resultado del producto canónico $\star$ sobre una variedad simpléctica arbitraria puede ser usado para probar que toda variedad regular de Poisson puede ser cuantizada, ver [47] para esta construcción. Cuando aún las herramientas para entender esta teoría estaban incompletas, surge la interrogante acerca de cuantización algebraica: ¿ Será posible encontrar una deformación formal del álgebra sobre una variedad de Poisson arbitraria?. Equivalentemente, ¿podremos definir una operación de multiplicación asociativa $\star$, el producto estrella, que depende del parámetro $\hbar$, de dos funciones tal que el espacio de funciones $C^\infty(M)$ con operadores lineales usuales y este producto sean una deformación formal del álgebra conmutativa de funciones con el corchete de Poisson?.

Esta interrogante estuvo abierta hasta 1993-1994 cuando M. Kontsevich propuso una formalización: “la conjetura de formalidad” (“Formality conjecture”), la que implicaría la respuesta deseada, es decir, si esta conjetura pudiera ser probada implicaría que cualquier variedad poissoniana de dimensión finita puede ser canónicamente deformado (en el sentido de cuantización por deformación algebraica). Kontsevich probó su propia conjetura[9] , por lo tanto la respuesta a la pregunta planteada es positiva.

Kontsevich utilizó argumentos cohomológicos para probar su conjetura. Sin embargo, su método de aproximación envuelve conceptos muy distantes del objetivo de nuestra investigación, pero que pueden ser consultados en M. Kontsevich[10]. Aquí sólo damos un marco referencial del desarrollo histórico del concepto cuantización.

Por otro lado, los **mercados financieros** han sido ampliamente estudiados a través del tiempo por la economía y las finanzas corporativas, [16], [18], [43]. Sin embargo, estudios de los mercados financieros desde el punto de vista geométrico y desde el punto de vista de la física cuántica y el álgebra abstracta, es aún mínimo. Por mencionar algunos de la última década: [39], [41], [48] . Así también, L. Sandoval[11] [44] usando los autovalores y autovectores propios de una matriz de correlaciones de los índices de los estados financieros de los mercados financieros, mostró que la alta volatilidad de los mercados están directamente relacionados vía correlaciones fuertes entre ellos.

Consideraremos éstas referencias mencionadas y de las siguientes secciones como ingredientes para la construcción de los modelos de cuantización algebraica que nos servirá para analizar su influencia en los mercados financieros de capitales.

[9] Kontsevich, M. (1994), "Deformation Quantization of Poisson Manifolds, I", q-alg/9709040.

[10] Kontsevich M. (1997), “Formality Conjecture”, In deformation Theory and Simplectic Geometry, Math. Phys. Stud., 20, pp 139-156, Klumer Acad. Publ., Dordrecht.

[11] Sandoval, L. *Correlación de los mercados financieros en tiempo de crísis, arXiv.org (2010).*

2.2. Bases Teóricas

2.2.1. Mercados Financieros

Existe mucho interés en el estudio de los mercados financieros y cómo los precios varían con el tiempo. La teoría que intenta predecir el futuro de estos cambios de los precios, al menos a corto plazo, es la estadística financiera. La escala de cambios en el precio sobre alguna unidad de tiempo es llamada volatilidad. Nuestro objetivo principal, en esta tesis, es construir una herramienta para el análisis de la volatilidad de los mercados financieros.

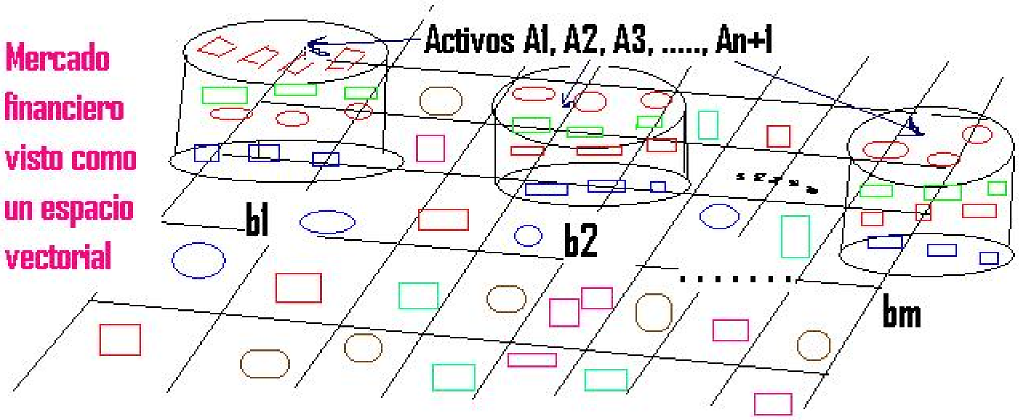
En economía, típicamente, el término mercado significa el agregado de posibles compradores y vendedores de bienes o servicios y las transacciones entre ellos. El término mercado es a veces usado en un sentido más estricto como **intercambio**, donde las organizaciones facilitan la compra-venta de seguros financieros, por ejemplo, intercambios de ”stock market“ o “commodity”, en un lugar físico (como el NYSE, BSE, NSE) o un sistema de mercado electrónico (como NASDAQ).

Como se sabe existe una variedad de definiciones y tipos de mercados financieros y los mercados financieros se componen del mercado de dinero y el mercado de capitales[43]. Aquí, debido a los objetivos de la investigación, adoptamos la siguiente definición de un mercado financiero (MF).

Consideremos un MF que consiste de $N+1$ activos financieros[12], donde uno de estos activos, llamado un *bono* o *mercado de dinero*, está libre de riesgo mientras el resto de N activos, llamados *“stocks”* o *mercado de capitales*, están expuestos a riesgo, [43].

[12] Estos activos forman un espacio vectorial $\mathbb{V}$ sobre los reales de dimensión $N+1$ cuyos elementos son canastas de activos, "baskets", que circulan a largo plazo y cuyas clases de canastas no vacias forman un portafolio. Más detalle en [41].

Figura 2.9: Un MFC visto como un portafolio de m canastas de activos financieros.



Fuente: Elaboración propia.

Definición 2.2.1.

Consideremos un espacio de probabilidades $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, que contiene todos los posibles estados del mercado, un espacio paramétrico: un intervalo de tiempo $[0, T]$ (o el conjunto $\mathbb{T} = \{0, 1, 2, \cdots, T\}$), donde el horizonte de negociación T es la fecha terminal de la actividad económica a ser modelada, y los puntos de $\mathbb{T}$ son fechas admisibles de negociación. Sea $\mathbb{X}(t) = (W_1(t), \cdots, W_D(t))', 0 \leq t \leq T$ un proceso Browniano, de dimensión D, adaptado a la filtración $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}(t) : 0 \leq t \leq T\}$.

Un mercado financiero $\mathcal{M}$ es definido como la sextupla:

$$\boxed{\mathcal{M} = (\mathbb{E},\ \mathbb{F},\ \tau,\ \Theta,\ \mathbb{X},\ \mathbb{S}(0))} \tag{2.2}$$

Donde

1. $\mathbb{E} = (\Omega, \mathcal{F}, P)$ es el espacio de probabilidades del proceso estocástico $\mathbb{X}(t)$.

2. $\mathbb{F}$ es una filtración del proceso.

3. $\tau = (\Gamma, \Xi, \Delta)$ es la tasa compuesta del proceso de cambios en el mercado finan-

ciero, donde:

3a. $\Gamma \in L_1[0,T]$ es la tasa del proceso de mercado de dinero libre de riesgo.

3b. $\Xi : [0,T] \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R} \in L_2[0,T]$ es la tasa media de retorno del proceso.

3c. $\Delta : [0,T] \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R} \in L_2[0,T]$ es la tasa de retorno de dividendos del proceso.

4. $\Theta : [0,T] \times \mathbb{R}^{N\times D} \to \mathbb{R}$ tal que
$\sum\limits_{n=1}^{N} \sum\limits_{d=1}^{D} \int_0^T \theta_{n,d}^2(s)ds < \infty$ es la volatilidad medible del proceso.

5. Un proceso estocástico $\mathbb{X}(t)$, de variación finita medible, singularmente continua.

6. Las condiciones iniciales $\mathbb{S}(0) = (S_0(0), S_1(0), \cdots, S_N(0))'$ de los M.F.

Donde en los modelos más simples Ω es un espacio muestral finito de puntos u con probabilidades $P(u) > 0$. En este caso, el σ-campo $\mathcal{F}$ es el conjunto potencia del conjunto Ω, asi que todo subconjunto de Ω es $\mathcal{F}$ medible.

Sin embargo, los modelos finitos pueden igualmente ser bien tratados, sobre un espacio muestral general Ω, asumiendo que el σ-campo $\mathcal{F}$ en cuestión es finitamente generado. En otras palabras, existe una partición finita $\mathcal{P}$ de Ω en conjuntos mutuamente disjuntos $A_1, A_2, \cdots, A_n$ cuya union es Ω y que genera $\mathcal{F}$ asi que $\mathcal{F}$ tambíen contiene sólo un número finito de eventos y precisamente consiste de aquellos eventos que pueden ser expresados en términos de $\mathcal{P}$. En este caso, requerimos que la medida de probabilidad P sobre $\mathcal{F}$ satisface que $P(A_i) > 0$ para todo i. En ambos casos, el único role de P es identificar los eventos en los cuales los inversionistas posiblemente estan de acuerdo; aunque ellos pueden estar en desacuerdo en la asignación de sus probabilidades a estos eventos. Nos referimos a modelos en el cual cualquiera de las asunciones precedentes aplica como *modelos finitos de mercados*. Sin embargo la mayoría de los ejemplos, en la práctica, son de este tipo. Las siguientes definiciones aplican a modelos generales de mercados. Los mercados de la vida real son, por supuesto, siempre finitos; luego la generalidad adicional ganada considerando espacios muestrales arbitrarios y σ-campos es una cuestión de conveniencia matemática en lugar de su amplia aplicabilidad.

Definición 2.2.2. (Filtración) La estructura de información disponible dada a los inversionistas es dado por una secuencia creciente (finita) de sub σ campos de $\mathcal{F}$. Una familia creciente

$$\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{F}_T = \mathcal{F} \text{ sobre } (\Omega, \mathcal{F}, P)$$

se llama una filtración $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}$.

Asumir que: **1)** $\mathcal{F}_0$ es trivial. Esto es, contiene solamente conjuntos de P-medida 0 ó 1.
2) $(\Omega, \mathcal{F}_0)$ es completo (asi que cualquier subconjunto de un conjunto núlo es por si mismo núlo y $\mathcal{F}_0$ contiene a todos los conjuntos P-nulos).
3) $\mathcal{F}_t$ contiene la información disponible a los inversionistas en el momento t. Además, note que en un modelo finito de mercados cada σ-campo $\mathcal{F}_t$ es generado por una partición minimal finita $\mathcal{P}_t$ de Ω y que

$$\mathcal{P}_0 = \{\Omega\} \subset \mathcal{P}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{P}_T = \mathcal{P}$$

En el tiempo t, todos los inversionistas saben que célula de la partición $\mathcal{P}_t$ contiene el "verdadero estado del mercado", pero ninguno de ellos conoce más.
Por otro lado, una parte de un **Bono** (mercado de dinero) tiene precio $S_0(t) > 0$ en el momento t, con $S_0(0) = 1$, es continua, adaptado a $\{\mathcal{F}_t; 0 \leq t \leq T\}$ y tiene variación finita. Debido a que tiene variación finita se puede descomponer en dos partes: una absolutamente continua $S_0^a(t)$ y la otra en singularmente continua $S_0^s(t)$, por el Teorema de descomposición de Lebesgue. Entonces, definimos la **tasa** del **mercado** de **dinero**

libre de riesgo $\Gamma(t)$ y el proceso estocástico $\mathbb{X}(t)$, respectivamente, como

$$\Gamma(t) = \frac{1}{S_0(t)}\frac{d}{dt}S_0^a(t) \quad \text{y} \quad \mathbb{X}(t) = \int_0^t \frac{1}{S_0^s(s)}dS_0(s)$$

del que resulta el sistema de ecuaciones diferenciales

$$dS_0(t) = S_0(t)\left[\Gamma(t)dt + d\mathbb{X}(t)\right], \quad \forall t \in [0,T]$$

que al resolver resulta

$$S_0(t) = exp\left(\int_0^t \Gamma(s)ds + \mathbb{X}(t)\right), \quad \forall t \in [0,T]$$

Luego, se puede ver que si $S_0(t)$ es absolutamente continua (Es decír, $\mathbb{X}(.) = 0$), entonces el precio del bono es parecido al valor de una cuenta de ahorros con una tasa de interés instantánea $\Gamma(t)$, el cual es aleatoria, libre de riesgo, dependiente del tiempo y $\mathcal{F}(t)$ medible.

Asimismo, los precios del “stock” (mercado de capitales) son modelados de manera muy similar, excepto con una componente aleatoria fluctuante (llamado su **volatilidad**). Como un premio originado por el riesgo de estas fluctuaciones aleatorias, la **tasa media de retorno** $\Xi(t)$ de un “stock” es mayor que la tasa libre de riesgo de un bono $\Gamma(t)$.

Sean $S_1(t) > 0, S_2(t) > 0, \cdots, S_N(t) > 0$ los precios, por partes de los N “stocks”, los cuales son procesos estocásticos continuos donde se cumple que

$$dS_n(t) = S_n(t)\left[\Xi_n(t)dt + d\mathbb{X}(t) + \sum_{d=1}^{D}\theta_{n,d}(t)dW_d(t)\right], \quad \forall t \in [0,T], n = 1,2,\ldots,N$$

Aquí $\theta_{n,d}(t), d = 1,2,\cdots,D$ da la volatilidad del n ésimo “stock” mientras que $\Xi_n(t)$ es su tasa media de retorno. Notar que, para asegurar un escenario de precios libre de arbitraje, el proceso estocástico $\mathbb{X}(t)$ debe ser definido como arriba. La solución a la última ecuación diferencial es

$$S_n(t) = S_n(0)exp\left(\int_0^t \sum_{d=1}^{D}\theta_{n,d}(s)dW_d(s) + \int_0^t\left[\Xi_n(s) - \frac{1}{2}\sum_{d=1}^{D}\theta_{n,d}^2(s)\right]ds + \mathbb{X}(t)\right)$$

$$\forall t \in [0,T], n = 1,2,\ldots,N$$

y los precios descontados del "stock" son

$$\frac{S_n(t)}{S_0(t)} = S_n(0)exp\left(\int_0^t \sum_{d=1}^{D} \theta_{n,d}(s)dW_d(s) + \int_0^t \left[\Xi_n(s) - \frac{1}{2}\sum_{d=1}^{D}\theta_{n,d}^2(s)\right] ds\right)$$
$$\forall t \in [0,T], n = 1,2,\ldots,N$$

Note que debido a las discontinuidades en el precio del bono hace que la contribución de $\mathbb{X}(t)$ no aparece en esta ecuación.

La **tasa de dividendos.** Cada "stock" puede tener asociado una tasa de dividendos del proceso $\Delta_n(t)$ que da la tasa de pagos de dividendos por unidad de precio del "stock" en el momento t. Incluyendo esta tasa en el modelo resulta el proceso $Y_n(t)$

$$dY_n(t) = S_n(t)\left[\Xi_n(t)dt + d\mathbb{X}(t) + \sum_{d=1}^{D}\theta_{n,d}(t)dW_d(t) + \Delta_n(t)\right],$$

$$\forall t \in [0,T], n = 1,2,\ldots,N$$

A continuación presentamos algunos tipos de mercados y sus caracteristicas, que son importantes y necesarias para cumplir con los objetivos de ésta investigación.

2.2.1.1. Mercados Viables

La teoría estándar de matemáticas de las finanzas es restringida a mercados financieros viables, es decir, en el cual no hay oportunidades para arbitraje. Si tales oportunidades existieran, esto implicaría la posibilidad de hacer arbitrariamente abundante ganancia libre de riesgo. Un modelo de mercado es viable si éste no contiene oportunidades de arbitraje[13].

[13] Una oportunidad de arbitraje es una estrategia admisible con valor inicial 0, pero su valor final es estrictamente positiva, con ocurrencia de probabilidad estrictamente positiva.

Definición 2.2.3. En un mercado financiero $\mathcal{M}$, un proceso de portafolio autofinanciado $\Pi(t)$ es está en oportunidad de arbitraje si el proceso de ganancia asociado $G(t) \geq 0,$ casi segura y $P[G(t) > 0] > 0$ estrictamente. Un mercado $\mathcal{M}$ en el cual no existe tal portafolio existe es llamado **viable**.

Implicaciones de esta definición:

I1.- En un mercado viable $\mathcal{M}$ existe $\mathcal{F}(t)$ adaptada al proceso

$\sigma : [0,T] \times \mathbb{R}^D \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que para casi todo $t \in [0,T]$,

$$\Xi_n(t) + \Delta_n(t) - \Gamma(t) = \sum_{d=1}^{D} \theta_{n,d}(t)\sigma_d(t)$$

Este σ es llamado el **precio** del **riesgo** del **mercado** y relaciona el "premium" para el n ésimo "stock" con su volatilidad θ_n.

Conversamente, si existe un proceso $\sigma(t)$ de dimensión D tal que satisface los requerimientos de arriba, y

$$\int_0^T \sum_{d=1}^{D} |\sigma_d(t)|^2 \, dt < \infty$$

$$E\left[exp\left(-\int_0^T \sum_{d=1}^{D} \sigma_d(t) dW_d(t) - \frac{1}{2}\int_0^T \sum_{d=1}^{D} |\sigma_d(t)|^2 \, dt\right)\right] = 1$$

Entonces el mercado es viable.

I2.- También, un mercado viable $\mathcal{M}$ puede tener sólo un mercado de dinero (bono) y por ende sólo una tasa libre de riesgo. Por lo tanto, si el n ésimo "stock" mantiene no riesgo (i.e. $\theta_{n,d}(t) = 0, d = 1, 2, \cdots, D$) y no paga dividendo (i.e. $\Delta_n(t) = 0$), entonces su tasa media de retorno es igual a la tasa del mercado de dinero (i.e. $\Xi_n(t) = \Gamma(t)$) y su precio alinea al precio del bono (i.e. $S_n(t) = S_n(0)S_0(t)$)

2.2.1.2. Mercados Financieros Normales

Definición 2.2.4. Un mercado financiero $\mathcal{M}$ es llamado normal o estándar si:

1. Es viable.
2. El número de “stocks” N no es mayor que la dimensión D del proceso de moción Browniano[14], subyacente $\mathbb{X}(t)$.
3. El precio del riesgo del proceso de mercado σ satisface:

$$\int_0^T \sum_{d=1}^{D} |\sigma_d(t)|^2 \, dt < \infty, \quad \text{casi segura.}$$

4. El proceso positivo

$$Z_0(t) = exp\left\{ -\int_0^t \sum_{d=1}^{D} \sigma_d(t) dW_d(t) - \frac{1}{2}\int_0^t \sum_{d=1}^{D} |\sigma_d(t)|^2 \, dt \right\} \quad \text{es una martingala.}$$

Notemos que, en el caso que el número de “stocks” N es mayor que la dimensión D, en violación del punto (2), por el álgebra lineal, ésto puede ser visto que existen $N - D$ “stocks” cuyas volatilidades (dados por el vector $(\theta_{n,1}, \cdots, \theta_{n,D})$) son combinaciones lineales de las volatilidades de los otros D “stocks” (debido a que el rango de θ es D). Por lo tanto, los N “stocks” pueden ser remplazados por D equivalentes fondos mutuos.

Definición 2.2.5. La medida de una martingala estandar P_0 sobre $\mathcal{F}(T)$ para un mercado estándar, es definido como:

$$P_0(A) = E\left[Z_0(T)1_A\right], \quad \forall A \in \mathcal{F}(T)$$

Notar que P y P_0 son absolutamente continuas con respecto a uno del otro, es decír, ellos son equivalentes. Además, por el teorema de Girsanov, se tiene que

$$W_0(t) = \mathbb{X}(t) + \int_0^t \sigma(s) ds$$

es un proceso Browniano[15] de dimensión D sobre la filtración $\mathbb{F}$ con respecto a P_0.

[14] TSEKOV, Roumen (2010)(PDF) *Brownian Markets*, http://arXiv.org/papers/1010.0261.pd

[15] KARATAZAS, Ioannis and SHREVE, S. (1991) *Brownian moción and Stochastic Calculus*, New York: Springer-Verlag, ISBN 0387976558

2.2.1.3. Mercados Financieros Completos

Nuestro objetivo en esta subsección es caracterizar la *completitud* de un modelo de mercado financiero [35]. Para ello, damos una formulación simple de completitud en términos de representabilidad de martingalas, restringiendo nuestra atención (y aplicación de resultados) a modelos de mercados *finitos*. Un ejemplo, de un modelo de mercado financiero completo y viable es el modelo binomial de Cox-Ross-Rubinstein que muestra que en su estructura existe una única medida de martingala equivalente. El siguiente teorema (**Segundo teorema fundamental** para modelos de mercados finitos) caracteriza esta propiedad de completitud en la clase de modelos de mercados finitos.

Teorema 2.2.1. Un modelo de mercado viable finito es completo sí y sólo sí éste admite una única medida de martingala equivalente.

Proposición 2.2.1. Un modelo finito viable de mercados $\mathcal{M}$ con $MMEQ$ es completo sí sólo sí cada $(\mathbb{F}, Q)$ martingala real valorada $M = (M_t)_{t\in\mathbb{T}}$ puede ser representada en la forma

$$M_t = M_0 + \sum_{d=1}^{D}\left(\sum_{u=1}^{t}\gamma_u^d \Delta \bar{S}_u^d\right) \tag{2.3}$$

para algún proceso predecible $\gamma = \{\gamma^d : d = 1, 2, \cdots, D\}$. Donde $\bar{S}$ es el precio descontado y sirve como una base (bajo la transformación martingala) para el espacio de martingalas $(\mathbb{F}, Q)$ sobre $(\Omega, \mathcal{F})$.

Sus demostraciones pueden leerse en [35], página 89 y 88, respectivamente. Aquí sólo, establecemos el teorema para aclarar el camino de nuestros objetivos.

Adicionalmente, un mercado financiero completo es aquel que permite un acercamiento efectivo del riesgo inherente en cualquier estrategia de inversión.

Definición 2.2.6. Sea $\mathcal{M}$ un mercado financiero estándar, y sea R una variable aleatoria medible en $\mathcal{F}(T)$, tal que:

$$P_0\left[\frac{R}{S_0(T)} > -\infty\right] = 1$$

$$x = E_0\left[\frac{R}{S_0(T)}\right] < \infty$$

El mercado $\mathcal{M}$ es completo si todo R es financiable. Es decír, si existe un proceso de portafolio x financiado $(\Pi_n(t); n = 1, 2, \cdots, N)$, tal que su proceso de ganancia asociado $Y(t)$ satisface $Y(t) = R$, casi segura.

Aclaración: Si una estrategia particular de inversión hace un llamado por un pago R en el momento T, el monto de aquel pago es desconocido en el momento $t = 0$, entonces una estrategia conservativa podría ser tener aparte reservado un monto $x = sup_w R(w)$ en orden de cubrir el pago. Sin embargo, en un mercado completo es posible tener aparte menor capital (tal como x) e invertirlo, así es que en el tiempo de maduración T este capital habrá crecido hasta alcanzar el tamaño de R.

Corolario 2.2.2. Un mercado financiero estándar $\mathcal{M}$ es completo sí y sólo sí $N = D$, y el proceso volátil $\theta(t)$, de dimensión $N \times D$, es no singular para casi todo $t \in [0, T]$ con respecto a la medida de Lebesque.

A continuación, procedemos a presentar el segundo ingrediente fundamental para la construcción de los modelos de cuantización algebraica. El ingrediente que constituye el ambiente físico (el teatro) del sistema dinámico de intercambios de la economía de los mercados financieros sometidos a un conjunto de reglas de estrategias de intercambio.

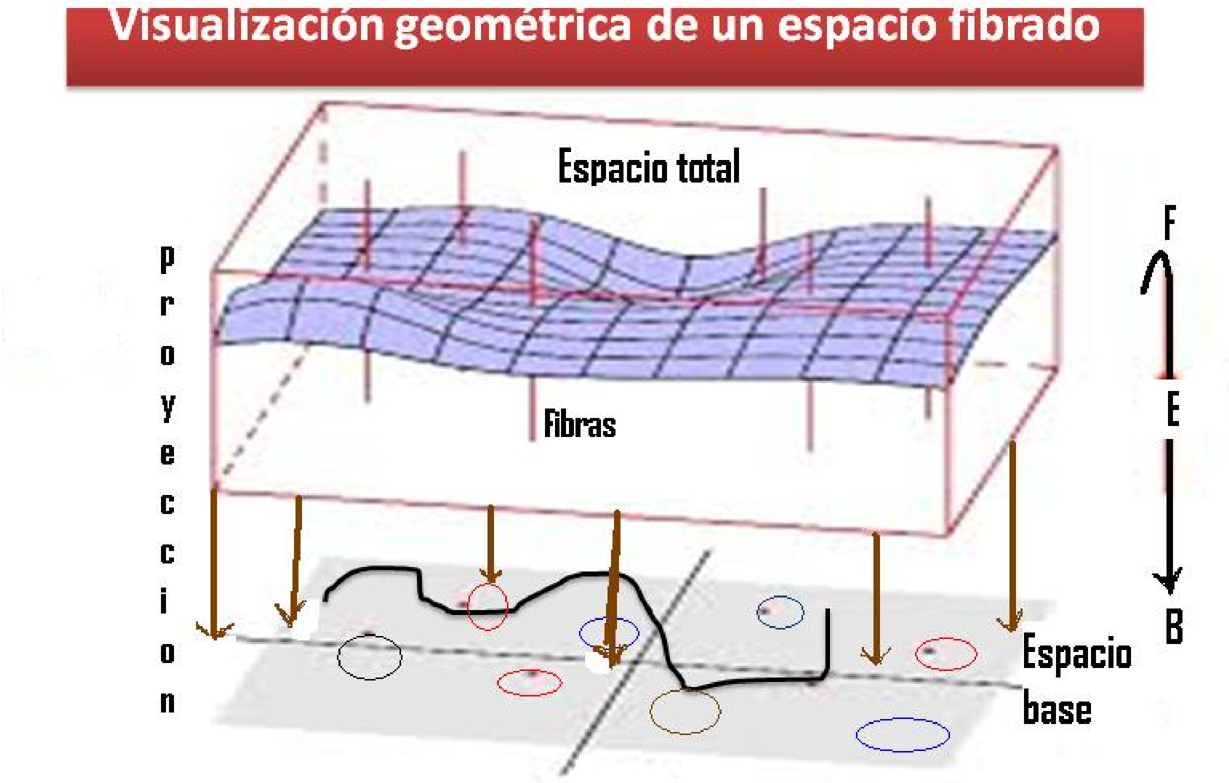
2.2.2. Espacios Fibrados

Esta subsección apunta a introducir el escenario físico donde los mercados financieros actúan, mediante sus intercambios de transporte paralelo. Este escenario o **teatro** es llamado espacios topológicos fibrados $\mathfrak{B}$. Desde que estas estructuras topológicas no son aún comunes en la literatura de las ciencias de negocios damos la definición formal, de los espacios fibrados, sus características y varios conceptos relacionados a los mercados financieros, los cuales son importantes para nuestros objetivos.

Los espacios fibrados nos dan el ambiente físico del desarrollo de los modelos de cuantización algebraica donde los principios axiomáticos de variación, covariación, simetrías de medición, cuantización, transporte paralelo, etc, de la dinámica de variación de precios, rendimientos y rapidez de cambios de la volatilidad de los mercados finacieros son analizados.

Un espacio fibrado es una estructura topológica muy popular e interesante en mate-

Figura 2.10: Un espacio fibrado visto como un escenario físico donde interactuan los MF.



Fuente: Elaboración propia.

mática, que geométricamente podríamos imaginarnos que tiene la forma de un fardo de manteles que cubren una mesa, ver Figura 2.10, mejor si los manteles tienen diseños cuadriculados. Para leer y entender este concepto, afortunadamente, existe una vasta literatura como, por ejemplo, Husemoller (1975), Dubrin *et al* (1974) y otras fuentes dadas en las referencias bibliográficas de esta tesis.

Informalmente hablando, un espacio topológico fibrado es una composición de objetos, que pueden ser espacios topológicos, espacios vectoriales, variedades diferenciables etc., que interactúan y se comunican mediante ciertos morfismos (su función proyección, su sección cruzada, las funciones coordenadas etc.) que describen e intercambian sus características y propiedades de dichos objetos[16].

Definición 2.2.7. Un **espacio fibrado** es definido[a] como la sextupla:

$$\boxed{\mathfrak{B} = (\mathcal{E},\ \ \pi,\ \ B,\ \ F,\ \ \mathcal{G},\ \ \{\phi_j, v_j\})} \tag{2.4}$$

[a] Steenrod N. (1999), *The Topology of Fibre Bundles*, Princeton LandMarks in Mathematics, N.J.

donde:

1. $\mathcal{E}$ es llamado **espacio fibrado** o **espacio total** del fibrado,

2. **B** es llamado **espacio base**,

3. Una función $\pi : \mathcal{E} \longrightarrow B$ suryectiva llamada **proyección**,

4. Un espacio F llamado la **fibra**,

5. Un grupo efectivo $\mathcal{G}$ de transformaciones de F llamado el **grupo** del **fibrado**,

6. Una familia de **homeomorfismos** y **entornos coordenados** $\{\phi_j, V_j\}$, donde, los

[16] Como ya mencionamos arriba éste será el escenario hipotético de las actividades de intercambio de activos de los mercados financieros.

V_j son conjuntos abiertos que cubren a B y para cada $j \in J$, un hommeomorfismo

$$\phi_j : V_j \times F \to \pi^{-1}(V_j) \tag{2.5}$$

es llamado la *función coordenada*.

Las funciones de coordenadas deben satisfacer las siguientes condiciones:

$$\pi\phi_j(x,y) = x, \text{ para } x \in V_j, y \in F,$$

si la función $\phi_{j,x} : F \to \pi^{-1}(x)$ es defnida por $\phi_{j,x}(y) = \phi_j(x,y)$, entonces, para cada par $i,j \in J$ y cada $x \in V_i \cap V_j$ el homeomorfismo

$$\phi_{j,x}^{-1}\phi_{i,x} : F \to F$$

coincide con la operación de un elemento de $\mathcal{G}$ (ésta es única desde que $\mathcal{G}$ es efectivo), y para cada par i,j en J, las funciones

$$g_{ji} : V_i \cap V_j \to \mathcal{G}$$

definido por $g_{ji} = \phi_{j,x}^{-1}\phi_{i,x}$ son continuas y son llamados las *coordenadas de transformaciones* del fibrado. Una consecuencia inmediata de esta definición es que, para cualquier i,j,k en J,

$$g_{kj}(x)g_{ji}(x) = g_{ki}(x) \text{ con } x \in V_i \cap V_j \cap V_k.$$

si hacemos que $i = j = k$, entonces $g_{ii}(x) =$ identidad de $\mathcal{G}$ con $x \in V_i$

Ahora hacemos $i = k$ en la penúltima relación arriba y al aplicar la identidad obtenemos

$$g_{jk}(x) = [g_{kj}(x)]^{-1}, \text{ con } x \in V_j \cap V_k$$

En este instante es conveniente introducir la función

$$\pi_j : \pi^{-1}(V_j) \to F$$

definido por

$$\pi_j(b) = \phi_{j,x}^{-1}(b) \quad \text{donde} \quad x = \pi(b)$$

Entonces π_j satisface las identidades

$$\pi_j\phi_j(x,y) = y, \phi_j(\pi(b), \pi_j(b)) = b, g_{ji}(\pi(b))\pi_i(b) = \pi_j(b) \ \text{ con } \ \pi(b) \in V_i \cap V_j$$

2.2.2.1. Funciones de Fibrados

Sea $\mathfrak{B}$ y $\mathfrak{B}'$ dos fibrados coordenados que tienen la misma fibra y el mismo grupo. Por una función $h : \mathfrak{B} \to \mathfrak{B}'$ es dicho una función continua $h : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ que tiene las siguientes propiedades[17]

1. h lleva cada fibra F_x de $\mathcal{E}$ homeomorficamente hacia una fibra $F_{x'}$ de $\mathcal{E}'$, luego induce una función continua $\bar{h} : B \to B'$ tal que

$$\pi^{'}h = \bar{h}\pi$$

2. si $x \in V_j \cap \bar{h}^{-1}(V^{'})_k$, y $h_x : F_x \longrightarrow F_{x'}$ es la función inducida por $h(x' = \bar{h}(x))$, entonces la función

$$\bar{g}_{kj}(x) = \phi_{k,x'}^{'-1} h_x \phi_{j,x}$$

de F a F inyectivamente coincide con la operación de un elemento de $\mathcal{G}$, y

3. la función

$$\bar{g}_{kj} : V_j \cap \bar{h}^{-1}(V_k^{'}) \longrightarrow \mathcal{G}$$

así obtenida es continua.

[17] En la literatura, ésta función h es llamada función preservante de la fibra. Aquí usaremos la expresión *función fibrada* para enfatizar que h es una función en el sentido que cumple las propiedades 1 a 3.

Además, es ya conocido que la función identidad $B \longrightarrow B$ es la función $\mathfrak{B} \longrightarrow \mathfrak{B}$ en este sentido. Igualmente la composición de dos funciones $\mathfrak{B} \longrightarrow \mathfrak{B}' \longrightarrow \mathfrak{B}''$ es también la función $\mathfrak{B} \longrightarrow \mathfrak{B}''$. Para una presentación bien detallada ver Steenrod N. (1999), *The Topology of Fibre Bundles*, Princeton LandMarks in Mathematics, N.J.

2.2.3. Cuantización Algebraica

Cuantización es, en su forma más amplia, el proceso de formación de un sistema mecánico cuántico iniciando con un sistema mecánico clásico, cuya utilidad es que resalta caracteristicas intrínsecas ocultas de un fenómeno con más detalle que en el sistema clásico no se muestran. F. A. Berezin[18] tempranamente dió una definición general de cuantización [13], [14]. También Abraham[19] R. proporciona un acopio introductorio del tema cuantización por deformación [1].

Existen varios métodos de cuantización: cuantización geométrica y cuantización algebraica, [7]. Para un enfoque más detallado, esta última se subclasifica en cuantización por deformación y cuantización por grupoides simplécticos, como se muestra en la Figura 2.11. Debido al título y objetivos de esta tesis estamos interesados en el método de cuantización algebraica por deformación. La deformación de álgebras es nuestra preocupación central, y en particular la deformación de álgebra de funciones.

Es generalmente aceptado que cuantización es un algoritmo por el cual un sistema cuántico corresponde a su sistema dinámico clásico cuyo proceso consiste en construir una familia $\mathcal{A}_\hbar$ de álgebras no conmutativas a partir de un álgebra de Poisson (ver defini-

[18] Berezin, F.A. (1975), "General Concept of Quantization", Comm. Math. Phys. 40, 153-174.

[19] Abraham R. and Marsden J.E. (1985), Foundations of Mechanics, Addison-Wesley Publ.Mass, pp 425-453.

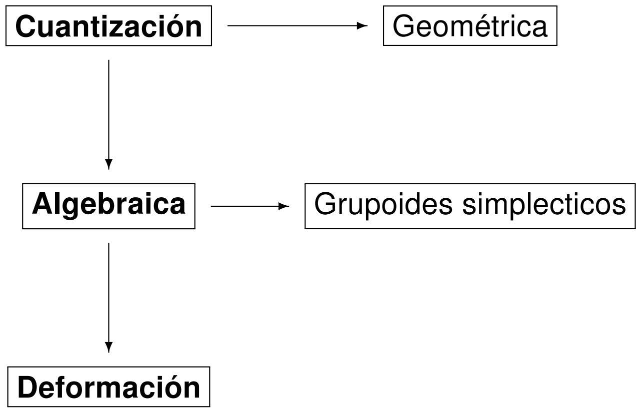


Figura 2.11: Clasificación de métodos de cuantización.

ción 2.4.8). Así, el proceso de cuantización se logra cuando iniciando con una variedad simplectica $\mathfrak{M}$, queremos identificar un álgebra-$\star$ $\mathfrak{A}$ de operadores, sobre esta variedad, el cual da como resultado el análogo del sistema mecánico clásico con el que iniciamos. Intuitivamente una cuantización por deformación de un objeto matemático es una familia de objetos de la misma clase que dependen de algún parámetro(s), en nuestro caso, del parámetro $\hbar$ (la constante de Plank). Usamos el corchete de Poisson para deformar el producto ordinario conmutativo de observables en mecánica clásica, elementos del álgebra de funciones, y obtener un producto no conmutativo adecuado para la mecánica cuántica.

Aproximaciones tempranas a este problema fueron basados en el principio de *correspondencia* entre los observables clásicos y cuánticos, independientemente de cómo el álgebra $\mathcal{A}$ es identificado, que podría ser descrito por una función lineal desde el álgebra de Poisson $C^\infty(\mathfrak{M})$ hacia $\mathfrak{A}$ el cual satisface el criterio conocido como los **axiomas de Dirac** [26].

Retrocediendo al legado de Dirac [26], que recientemente ha sido reconsiderado en [1], [7], [13], [14]. Una aproximación a cuantización está basada en la idea de que la estructura multiplicativa del álgebra $\star$ de observables cuánticos es más central a cuantización que la representación de los observables como operadores sobre el espacio de Hilbert, y que la mayor parte de la mecánica cuántica puede ser hecho sin preocuparse por la naturaleza precisa de los observables. Los observables cuánticos involucran un álgebra no conmutativa $\mathfrak{A}$ el cual es asumido que pertenece a una familia de álgebras $\mathcal{A}_\hbar$, todos definidos sobre el mismo espacio vectorial, pero con una multiplicación $\star_\hbar$ dependiente de $\hbar$, tal que, cuando $\hbar \to 0$ el álgebra $\mathcal{A}_\hbar$ se aproxima al álgebra conmutativa $\mathcal{A}_0$, el cual puede ser interpretado como el álgebra de funciones $C^\infty(\mathfrak{M})$ sobre un espacio fase clásico. Adicionalmente, es asumido que el conmutador de $\star_\hbar$ se aproxima al corchete de Poisson en el limite de los grandes números cuánticos. Esto es,

$$\{f, g\} = \lim_{\hbar \to 0}(f \star_\hbar g - g \star_\hbar f)/i\hbar \tag{2.6}$$

El objetivo abstracto de cuantización algebraica es construir la familia $\mathcal{A}_\hbar$ de álgebras no conmutativas a partir de un álgebra de Poisson.

Luego de dar un panorama de ideas más importantes de cuantización algebraica en la siguiente sección damos la definición de cuantización por deformación [7] y la definición general de cuantización [14], desde el punto de vista matemático, que nos ayudará a desarrollar el modelo de cuantización algebraica de mercados financieros.

2.2.3.1. Cuantización por Deformación

El propósito de cuantización por deformación es describir a la familia $\star_\hbar$ de productos cuánticos sobre sobre un álgebra de Poisson $\mathcal{A}_\mathcal{P}$ como una serie asintótica (en $\hbar$) de productos sobre $\mathcal{A}_\mathcal{P}$. De acuerdo con las remarcaciones introductorias arriba, los términos de orden cero y primer orden de estas series son determinados por la estructura de álgebra de Poisson de $\mathcal{A}_\mathcal{P}$; el rol de los términos de mayor orden es, informalmente hablando, dar un camino más preciso dependiente de $\hbar$ desde la mecánica clásica a la mecánica cuántica.

En orden de formular la definición de cuantización por deformación, la definición de un producto estrella $\star$ y otras estructuras relevantes que ocurren en el marco de cuantización por deformación necesitamos el concepto de series de potencias formales, que presentamos en la sección 2.4, definición 2.4.13.

Definición 2.2.8. Sea $\mathcal{A}$ un espacio vectorial complejo equipado con una estructura de un álgebra conmutativa y asociativa, y sea $*_\hbar$ una familia de multiplicaciones asociativas sobre $\mathcal{A}$ dado por una serie formal de potencias

$$f *_\hbar g = \sum_{j=0}^{\infty} B_j(f,g)\hbar^j \tag{2.7}$$

donde cada $B_j : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ es una función bilineal. Entonces $*_\hbar$ es llamado una **deformación** $\star$ del álgebra $\mathcal{A}$ si

1. $B_0(f,g)$ es igual al producto en $\mathcal{A}$.
2. $B_j(g,f) = (-1)^j B_j(f,g)$
3. $B_j(1,f) = 0$ para $j \geq 1$
4. B_j es un operador diferencial en cada argumento.
5. $(f *_\hbar g) *_\hbar h = f *_\hbar (g *_\hbar h)$

Para que la condición (5) tenga sentido, debemos extender el producto $*_\hbar$ en la manera conocida desde $\mathcal{A}$ hacia el espacio $\mathcal{A}[[\hbar]]$ de series formales de potencias. Anotamos que la serie de potencias (2.7) no es en general asumido convergente para $\hbar \neq 0$. En cambio este puede ser visto como una "expansión asintótica" para el producto $*_\hbar$, y que manipulaciones de esta serie será puramente formal.

En cualquier caso, las condiciones (1-5) implican que

$$\{f, g\} = \frac{1}{2i} B_1(f, g) \tag{2.8}$$

define una estructura de álgebra de Poisson sobre $\mathcal{A}$, que en particular nos interesa que $\mathcal{A} = C^\infty(\mathfrak{M})$. Esta observación sugiere la pregunta que si toda estructura de Poisson sobre un álgebra de funciones $C^\infty(\mathfrak{M})$ puede ser realizada con el término de primer orden en una deformación de $\mathcal{A}$ mediante $*$.

Para clarificar este concepto, en términos concretos, consideremos como ejemplo, el **Producto de Moyal**.

Con $\mathfrak{M} = \mathbb{R}^d$ y sea α una estructura constante de Poisson sobre $\mathfrak{M}$. Para ser más específico, sea

$$\alpha = \sum_{i,j} \frac{1}{2} \alpha^{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial x_j} \ \text{ donde } \ \alpha^{ij} = -\alpha^{ji} \in \mathbb{R}$$

donde x_i son las coordenadas sobre $\mathbb{R}^d$. En tal caso tendriamos, el corchete de Poisson,

$$\{f, g\} = \sum_{i,j} \alpha^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j}$$

El producto $\star_\hbar$ de Moyal, dependiente de $\hbar$, es dado por exponenciación de éste operador de Poisson:

$$f \star_\hbar g = \left(exp(-i\frac{\hbar}{2} \sum_{i,j} \alpha^{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial x_j}) \right) (f, g)$$

Este es el primer ejemplo conocido de deformación no trivial del corchete de Poisson (equivalente al producto $\star$) y la idea puede ser generalizado para cualquier variedad de Poisson equipado con una conexión plana de Poisson libre de torsión. El lector puede ver más detalles en [7] y [47].

La idea principal de Dirac quien notó que cuantización podría ser entendido como un proceso de tomar una variedad de Poisson e imponer un nuevo producto noconmutativo sobre el álgebra de funciones, digamos $f \star_\hbar g$ tal que el conmutador $[f,g] = f \star_\hbar g - g \star_\hbar f$ es igual a $i\hbar\{f,g\}$ más términos de orden $\hbar^2$. Es decir,

$$[f,g] = f \star_\hbar g - g \star_\hbar f = i\hbar\{f,g\} + \mathcal{O}(\hbar^2) \tag{2.9}$$

Dirac también anotó, [26], que los términos de mayor orden se mostraban en la expansión de la serie, pero optó por ignorarlos al considerar sólo los términos lineales en $\hbar$ para una buena aproximación hacia el objeto cuántico real.

Una variación de estas definiciones, apropiada a los objetivos de esta investigación , se da a continuación.

2.2.3.2. Definición General de Cuantización (F.A. Berezin)

Definición 2.2.9. El proceso de cuantización algebraica $\mathfrak{Q}$ es definido como la sextupla.

$$\boxed{\mathfrak{Q} = \left\langle (\mathfrak{M}, w), (C^\infty(\mathfrak{M}), \{.,.\}), (\mathfrak{M}', w'), (\mathcal{A}_\hbar, \star_\hbar), \Phi, \mathfrak{A} \right\rangle} \tag{2.10}$$

Donde el álgebra asociativa no conmutativa $\mathfrak{A}$ con involución[a] es identificado como la *cuantización* de una *mecánica clásica*[b] $(\mathfrak{M}, w)$ a una mecánica cuántica $(\mathfrak{M}', w')$ si cumple los siguientes requisitos:

[a] Para un álgebra $\mathfrak{A}$ de funciones (u operadores) continuas sobre un conjunto compacto, en el cual, la involución envía cualquier operador hacia su adjunto.

[b] Donde $\mathfrak{M}$ es alguna variedad diferenciable (e.g. Poisson) y w es un campo tensorial antisimétrico sobre ésta variedad.

1. Existe una familia $\mathcal{A}_\hbar$ de álgebras asociativas con involución, tal que:

   1a. El indice $\hbar$ recorre a través del conjunto E, el lado positivo de la abscisa real, donde 0 es un punto límite (0 no está en E).

   1b. El álgebra $\mathfrak{A}$ consiste de las funciones $f(\hbar)$ que toman valores en $A_\hbar$. La involución y multiplicación en $\mathfrak{A}$ son conexos con la involución y multiplicación en $\mathcal{A}_\hbar$ en una manera usual:

$(f^{\circledS})(\hbar) = (f(\hbar))^S$ donde $\circledS$, S son las involuciones en $\mathfrak{A}$ y $\mathcal{A}_\hbar$, respectivamente.

$(f_1 \circledast f_2)(\hbar) = f_1(\hbar) * f_2(\hbar)$, donde $\circledast$ y $*$ son las multiplicaciones en $\mathfrak{A}$ y $\mathcal{A}_\hbar$, respectivamente.

2. Existe un homomorfismo Φ del álgebra $\mathfrak{A}$ hacia el álgebra $C^\infty(\mathfrak{M})$ de funciones diferenciables sobre $\mathfrak{M}$ con las operaciones usuales de adición y multiplicación. Este homomorfismo debe tener las siguientes propiedades:

   2a.- Para cualquier par de puntos $x_1, x_2 \in \mathfrak{M}$ existe una función $f(x) \in \Phi(\mathfrak{A})$ tal que $f(x_1) \neq f(x_2)$,

   2b.- $\Phi(\frac{1}{\hbar}(f * g - g * f)) = i\{\Phi(f), \Phi(g)\}$, donde $i = \sqrt{-1}$ y $*$ denota la multiplicación en $\mathfrak{A}$ y $\{.,.\}$ denota el corchete de Poisson en $C^\infty(\mathfrak{M})$,

   2c.- $\Phi(f^\sigma) = \overline{\Phi(f)}$, donde $f \rightarrow f^\sigma$ representa la involución en $\mathfrak{A}$ y la barra representa el conjugado complejo.

   Cuantización especial[20]. Es aquella que tiene éstas y las dos propiedades adicionales siguientes:

3. El álgebra $A_\hbar$ consiste de las funciones diferenciables $f(x), x \in \mathfrak{M}$.

4. El álgebra $\mathfrak{A}$ consiste de funciones $f(\hbar, x) \in A_\hbar$ para $\hbar$ fijo.

5. El homomorfismo $\Phi : \mathfrak{A} \rightarrow C^\infty(\mathfrak{M})$ está dado por $\Phi(f) = lim_{\hbar\rightarrow 0} f(\hbar, x)$.

   Existen otras cuantizaciones que además posén las siguientes propiedades:

6. El álgebra $A_\hbar$ tiene unidad, el cual la función $f_0(\hbar, x) \equiv 1$ sirve como unidad.

[20] Una teoría consistente está disponible sólo para ésta cuantización especial en F.A. Berezin (1973-4), en idioma Ruso.

7. El álgebra $A_\hbar$ es un álgebra que tiene una traza. En éste caso la función lineal

$$S_p f = c \int f(x) d\mu(x) \tag{2.11}$$

donde $d\mu(x)$ es alguna medida sobre $\mathfrak{M}$ y c es algún multiplicador. Anotamos que si el campo tensorial w es no degenerado, entonces $d\mu(x) = cw^{\frac{n}{2}}$. Para mayor detalle ver [14].

2.3. Modelo de Cuantización Algebraica: Construcción

El procedimiento metodológico para la construcción de los modelos financieros de cuantización algebraica para analizar el comportamiento de los mercados financieros de capitales consiste, informalmente hablando, en adjuntar los tres ingredientes citados en la ecuación (1.1), página 8. Es decir, adjuntamos en (1.1) la ecuación (2.2) de la sección 2.2.1 (definición 2.2.1), la ecuación (2.4) de la sección 2.2.2 (definición 2.2.7), y la ecuación (2.10) de la subsección 2.2.3.2 (definición 2.2.9) correspondientes a las ecuaciones de las definiciones de mercados financieros $\mathcal{M}$, espacios topológicos fibrados $\mathfrak{B}$, y cuantización algebraica $\mathfrak{Q}$, respectivamente.

Este escenario de integración de tres disciplinas científicas (las ciencias financieras, la matemática, y la física cuántica) podría entenderse, a grosso modo, como un conjunto de mercados financieros (**los actores** del modelo) o un conjunto de activos en cada mercado financiero; el ambiente físico subyacente estructurado por el espacio fibrado $\mathfrak{B}$ (**el teatro** del modelo) donde actúan los mercados financieros ceñidos a leyes de intercambio financiero y desplazamientos paralelos; y un conjunto de álgebras abstractas (**el espíritu** del modelo) que describen el proceso evolutivo de la cuantización que provocan y generan el movimiento de las actividades de los mercados financieros debido al cambio de estado de sus activos en el tiempo. Este movimiento, que constituye el dinamismo de los mercados financieros ocurridos en el tiempo, es explicado por una familia de variables aleatorias que conforman un proceso estocástico.

Las álgebras involucradas en este proceso son cruciales durante el pasaje del cambio del sistema mecánico clásico hacia el sistema mecánico cuántico y explican los cambios de estados de los mercados y de sus respectivos activos financieros.

La integración de estos tres ingredientes se denota, como en (1.1), por la terna

$$(\mathcal{M} \quad, \mathcal{B}, \quad \mathcal{Q})$$

Donde cada componente de esta terna, tal como han sido definidas en las secciones previas de este capítulo, están integrados por séxtuplas que al inter relacionarlos, durante el planteamiento del problema, elegimos los indicadores que hemos establecido en nuestros objetivos.

Nuestro propósito fundamental es, a la luz de nuestros objetivos, analizar y formalizar la causa y el efecto de las interacciones entre estos dieciocho componentes mediante la axiomatización de sus relaciones y darles significado económico, financiero y contable. Este posicionamiento de la terna y de sus seis componentes, respectivamente, es sólo una presentación decorativa con el fin de visualizar a los indicadores considerados y sus interacciones tanto para la variable independiente y la variable dependiente que conforman el título de esta tesis.

Debe notarse que de estas 18 componentes, que integran el modelo, algunas componentes quedan libres de nuestros objetivos para futuras investigaciones de sus interacciones. Sin embargo, enfocando a todas las componentes simultáneamente y otras que podrían integrarse en el modelo es posible construir una familia de modelos que denominaremos los "**modelos financieros triádicos de orden** (p, q, r)" para $p, q, r = 1, 2, \cdots, n$ que serán publicaciones inmediatas a esta tesis. Aquí estamos direccionados a cinco objetivos específicos planteados previamente en las secciones (1.4.1) y (1.4.2), del proyecto de esta investigación.

Más concretamente, adjuntamos las tres definiciones claves (ecuaciones 2.2, 2.4, y 2.10) en la siguiente expresión triángulo (TRI):

$$\mathfrak{B} = \langle\, \mathcal{E},\ \pi,\ B,\ \mathcal{F},\ \mathcal{G},\ \{\phi_j, V_j\}\rangle$$

$$\mathcal{M} = \langle \mathbb{E},\ \mathbb{F},\ \tau,\ \Theta,\ \mathbb{X},\ \mathbb{S}(0)\rangle$$

$$\Big\langle (\mathfrak{M}, w), (C^{\infty}(\mathfrak{M}), \{.,.\}), (\mathfrak{M}', w'), (\mathcal{A}_{\hbar}, \star_{\hbar}), \mathfrak{A}, \Phi \Big\rangle = \mathfrak{Q}$$

Una estrategia cómoda y didáctica de explicar estas interacciones consiste en posicionar las séxtuplas sobre las aristas de un triángulo, de tal manera, que formen la triada (6,6,6). Gométricamente, en la expresión TRI, se visualiza un triángulo que en sus aristas posicionamos las 6 componentes de cada una de las tres séxtuplas y en cada vértice posicionamos a los tres ingredientes $\mathcal{M}$, $\mathfrak{B}$, y $\mathfrak{Q}$ de tal forma que al relacionarlos combinatorialmente tomando una componente de cada de cada séxtupla formamos triadas y obtenemos $(\binom{6}{1})^3$ maneras de relacionar sus componentes de los tres ingredientes $(\mathcal{M}\ \ ,\mathcal{B},\ \ \mathcal{Q})$. Así por ejemplo, mencionamos algunos

$$(\mathbb{E}, \mathcal{E}, (C^{\infty}(\mathfrak{M}), \{.,.\})), (\mathbb{E}, \mathcal{E}, \mathfrak{A}), \cdots, (\mathbb{S}(0), \{\phi_j, v_j\}, (\mathfrak{M}', w'))$$

donde algunas de las combinaciones quizás no tengan ninguna correlación o significado financiero, otras quedan para futuras investigaciones, y sólo cinco son los objetivos específicos de esta investigación establecidos en la sección (1.4.2), que simbólicamente denotamos por:

$\mathfrak{O}_1 : \qquad (\mathbb{X}(u,t), \mathcal{G}, \mathfrak{A})$

$\mathfrak{O}_2 : \qquad (\tau, \mathcal{G}, \Phi : \mathfrak{A} \longrightarrow C^{\infty}(\mathfrak{M}))$

$\mathfrak{O}_3 : \qquad (\Theta, \mathcal{G}, ((\mathfrak{M}, w), (\mathfrak{M}', w')))$

$\mathfrak{O}_4 : \qquad (\mathbb{F}, (\mathcal{E}, \pi, B), \mathfrak{A})$

$\mathfrak{O}_5 : \qquad ((\mathbb{E}, \mathbb{X}), (\mathcal{E}, \pi, B), ((\mathfrak{M}, w), (\mathfrak{M}', w')))$

Para continuar la exposición con mayor claridad recordamos algunas de las notaciones expuestas anteriormente. Por instancia, $\mathbb{E} = (\Omega, \mathcal{F}, P)$ es el espacio de probabilidades que representa el cimiento subyacente del proceso estocástico $\mathbb{X}(u,t)$, con $u \in \Omega$, y este proceso nos da la información del espacio de estados de los mercados financieros (o el estado de los activos de los mercados financieros) en el momento t de la ocurrencia del evento u. Por otro lado, $\mathfrak{A}$ es el álgebra asociativa no conmutativa con involución que tiene su origen en el álgebra de funciones continuas $C^{\infty}(\mathfrak{M})$ sobre una variedad $\mathfrak{M}$ (de Poisson) es identificado como la cuantización de una mecánica clásica $(\mathfrak{M}, w)$ y ambos estan relacionados vía el homomorfismo Φ. Este último, relaciona a la tasa compuesta $\tau = (\Gamma, \Xi, \Delta)$ de los mercados financieros. Además Θ denota la volatilidad de los mercados financieros, fluctuante en el tiempo, en el ambiente de la mecánica clásica $(\mathfrak{M}, w)$ y en el ambiente de la mecánica cuántica $(\mathfrak{M}', w')$ cuyas propiedades topológicas queremos identificar y darles significado financiero.

Observamos que los objetivos planteados en esta investigación tratan de describir cualitativamente el efecto de los modelos de cuantización algebraica en la descripción y análisis de las ocurrencias aleatorias en los mercados financieros debido al cambio repentino de sus activos en el tiempo.

El teorema siguiente establece la relación entre los indicadores que conforman los objetivos y es el **teorema fundamental** de esta tesis.

Teorema 2.3.1. El modelo de cuantización algebraica $(\mathcal{M}\ ,\mathcal{B},\ \ \mathcal{Q})$ coadyuva en los mercados financieros de capitales $\mathcal{M}$ sí y sólo sí se cumple las siguientes condiciones:

$\mathfrak{D}_1$.– El álgebra $\mathfrak{A}$ influye en el proceso vectorial estocástico $\mathbb{X}(u,t)$.

$\mathfrak{D}_2$.– El homomorfismo $\Phi\ :\ \mathfrak{A}\ \longrightarrow\ C^{\infty}(\mathfrak{M})$ explica el rendimiento de $\tau=(\Gamma,\Xi,\Delta)$.

$\mathfrak{D}_3$.– Los espacios $(\mathfrak{M},w)$ y $(\mathfrak{M}^{'},w^{'})$ influyen en el análisis de la volatilidad Θ.

$\mathfrak{D}_4$.– Las operaciones de transporte paralelo e involuciones determinan la estructura geométrica fibrada de los mercados financieros.

$\mathfrak{D}_5$.– Las propiedades topológicas de $(\mathfrak{M},w)$ y $(\mathfrak{M}^{'},w^{'})$ describen la aleatoriedad de los mercados financieros.

Nuestro propósito es demostrar que las hipótesis planteadas en la sección 2.5 son verdaderas. Es decir, al analizar las interacciones entre las componentes de $\mathcal{M}$, $\mathfrak{B}$, y $\mathfrak{Q}$ del modelo de cuantización algebraica en los mercados financieros los objetivos planteados en la sección 1.4 se verifican en el mundo real de la economía, las ciencias financieras y la contabilidad, en particular en los mercados financieros. Pero, puntualmente queremos analizar la volatilidad del proceso de los mercados financieros (el $\mathfrak{D}_3$) sobre una composición de espacios, el espacio fibrado $\mathfrak{B}$, cuyas componentes serán variedades suaves orientables de Poisson cuya álgebra asociativa y conmutativa de funciones $C^{\infty}(\mathfrak{M})$ sobre esta variedad de Poisson $\mathfrak{M}$ ha sido deformada en una familia de álgebras $\mathcal{A}_{\hbar}$, que es de hecho una familia de multiplicaciones asociativas $\star_{\hbar}$ ver [47], sobre un espacio vectorial fijo (ver sección 2.4 definición 2.4.14), mediante el operador corchete de Poisson $\{,\}$ y $\hbar$ es el parámetro de la deformación en dirección de la derivada evaluada en

$\hbar$ cuando $\hbar \to 0$.

En otras palabras, queremos describir las estructuras matemáticas de índole financiera detras de estas interacciones cuantizadas y sus influencias a las leyes financieras tradicionales ya conocidas, en particular al de los mercados financieros. Por ejemplo, podríamos considerar un método Markoviano continuo de preciación de activos con opciones al estilo Americano sobre un portafolio multidimensional de activos. Esta dinámica de activos sigue un modelo de difusión d-dimensional en el periodo de maduración $[0, T]$ que podría ser visto desde el punto de vista cuántico en un ambiente espacial topológico fibrado con capacidades de explicar su comportamiento financiero. Otro caso cercano a éste es la descripción del modelo local de volatilidad: la extensión clásica del modelo de F. Black y M. Scholes [15].

Algo más simple. Si $\mathcal{M}$ es un mercado financiero viable existe un proceso $\mathcal{F}(t)$ adaptado $P : [0, T] \times \mathbb{R}^D \to \mathbb{R}$ tal que para casi todo $t \in [0, T]$ se verifica que

$$\Xi_n(t) + \Delta_n(t) - \Gamma(t) = \sum_{d=1}^{D} \Theta_{n,d}(t) P_d(t) \tag{2.12}$$

P es llamado el riesgo de precio de mercado y relaciona al 'premium' para el n ésimo "stock" por su volatilidad $\Theta_{n,d}(t)$, y conversamente.

Demostración del $\mathfrak{D}_1$: El álgebra $\mathfrak{A}$, de la cuantización, influye en el proceso vectorial estocástico $\mathbb{X}(u, t)$.

Consideramos la definición 2.4.2 un proceso estocástico $\mathbb{X} = \{X(u, t), u \in \Omega, t \in [0, T]\}$ sobre $\mathbb{E}$. Donde para un valor futuro t, los elementos $X(u, t)$ son variables aleatorias continuas[21] que nos informan el estado del mercado por el cual $X(u, .)$ representa el precio de un activo o del mercado o el valor de la volatilidad Θ y conversamente. Por otro lado, fijando u se observa una realización, o trayectoria $X(., t)$, del precio o volatili-

[21] Debido a los objetivos de la tesis adoptamos las variables aleatorias continuas, dejando las variables aleatorias discretas por un momento para otros propósitos.

dad como una función del tiempo t.

Primero: Debemos probar que una familia de vectores aleatorias continuos $\{X(u,t)\}$ del proceso estocástico $\mathbb{X}(u,t)$ forman un álgebra de Poisson $C^{\infty}(\mathfrak{M})$ sobre una variedad de Poisson $\mathfrak{M}$ para $\mathfrak{M} = \mathbb{R}^D$ cuyos observables clásicos son vectores aleatorios, de dimensión D, con argumentos continuos.

Es decír, $\langle \mathbb{X}, +, \circ, \otimes \rangle$ es un álgebra asociativa y conmutativa cuyos observables son vectores aleatorios.

Donde $+$: adición de vectores aleatorios,

$\circ$: multiplicación escalar,

$\otimes$: multiplicación vectorial.

Sean $X_1, X_2, \cdots$, una colección de vectores aleatorios en $\mathbb{X}$ y sean $k_1, k_2, \cdots$ en un campo $\mathbb{K}$ real o complejo. Para cualquier $X_1, X_2, X_3 \in \mathbb{X}$ y $k_1, k_2 \in \mathbb{K}$.

Se cumplen los siguientes postulados[22]:

A1: $X_1 + X_2 \in \mathbb{X}$ clausura1.

A2: $(X_1 + X_2) + X_3 = X_1 + (X_2 + X_3)$ asociativa.

A3: $X_0 + X_1 = X_1 = X_0 + X_1$ identidad.

A4: $X_1 + (-X_1) = X_0 = -X_1 + X_1$ inverso.

A5: $X_1 + X_2 = X_2 + X_1$ conmutatividad.

B1: $k_1 \circ X_1 \in \mathbb{X}$ clausura2.

B2: $k_1 \circ (k_2 \circ X_1) = (k_1 \circ k_2) \circ X_1$ asociativa.

B3: $1 \circ X_1 = X_1 \circ 1 = X_1$ identidad.

[22] Estos postulados se cumplen, claramente, desde que las operaciones con variables aleatorias: suma, resta, multiplicación y multiplicación por un escalar, etc., se cumplen.

B4: $(k_1 + k_2) \circ X_1 = k_1 \circ X_1 + k_2 \circ X_1$ distributiva.

$$\left.\begin{aligned} k_1 \circ (X_1 + X_2) = k_1 \circ X_1 + k_1 \circ X_2 \\ (k_1 + k_2) \circ X_1 = k_1 \circ X_1 + k_2 \circ X_1. \end{aligned}\right\} \text{B5: Bilinealidad} \tag{2.13}$$

C1: $X_1 \otimes X_2 \in \mathbb{X}$ clausura3.

$$\left.\begin{aligned} (X_1 + X_2) \otimes X_3 = X_1 \otimes X_3 + X_2 \otimes X_3. \\ X_1 \otimes (X_2 + X_3) = X_1 \otimes X_3 + X_1 \otimes X_3. \end{aligned}\right\} \text{C2: Bilinealidad} \tag{2.14}$$

D1: $(X_1 \otimes X_2) \otimes X_3 = X_1 \otimes (X_2 \otimes X_3)$ asociatividad.

D2: $X_1 \otimes 1 = X_1$ Identidad.

D3: $X_1 \otimes X_2 = \pm X_2 \otimes X_1$ simétrica/antisimétrica.

D4: $X_1 \otimes (X_2 \otimes X_3) = (X_1 \otimes X_2) \otimes X_3 + X_2 \otimes (X_1 \otimes X_3)$ derivación[23].

Estos postulados sostienen la construcción de un espacio vectorial y de hecho definen una estructura de un álgebra asociativa y conmutativa, respecto a la adición, de vectores aleatorios de un proceso estocástico $\mathbb{X}$ de dimensión D sobre $\mathbb{E}$, que gobiernan al sistema dinámico de los mercados financieros.

Más aún, considerando la definición (2.4.8) y el hecho que los vectores aleatorios obedecen de manera natural la multiplicación escalar en vectores y el producto ordinario entre ellos, se tiene:

E1: $X_i \cdot X_j = X_j \cdot X_i$ para todo X_i y X_j en $\mathbb{X}$ y una estructura de álgebra de Lie, tal que se establece:

E2: $(X_i, X_j) \longmapsto \{X_i, X_j\}$ que satisface los axiomas D1 a D4 y constituyen un álgebra asociativa y conmutativa. Luego, de todo esto resulta un álgebra de Poisson sobre el espacio vectorial $\mathbb{X}$ cuyos elementos son vectores aleatorios y $\{.,.\}$ es el corchete de Poisson que satisface la codición de compatibilidad, ecuación 2.19).

[23] Esta propiedad, llamada propiedad de derivación, puede ser escrito de forma más familiar como $[X_1, [X_2, X_3]] + [X_3, [X_1, X_2]] + [X_2, [X_3, X_1]] = 0$, llamada la identidad de Jacobi.

Segundo: Ahora, visto que esto ocurre en el sistema mecánico clásico queremos alterar, "deformar", esta álgebra conmutativa a una nueva estructura algebraica noconmutativa que interactúa en el sistema cuántico. Esto es, debemos deformar el álgebra de Poisson de vectores aleatorios en una familia de álgebras $\mathbb{X}_{\star_\hbar}$ que dependen del parámetro formal $\hbar$ (ver definición 2.4.13) tal que cuando $\hbar \longrightarrow 0$ el resultado $\mathbb{X}_{\star_0}$ es el álgebra original con el cual habíamos iniciado, que arriba denotamos por $C^\infty(\mathfrak{M})$.

Esto es hecho y explicado como efecto de la sección (2.2.3) vía la definición 2.2.8 y 2.4.14, en el que $\star_\hbar$ es el deformador del álgebra inicial $\langle \mathbb{X}, ., \{,\} \rangle = C^\infty(\mathbb{X})$ de Poisson en una familia de series formales

$$X_i \star_\hbar X_r = X_i \cdot X_r + \sum_{j \geq 1} B_j(X_i, X_r)\hbar^j \quad \text{para} \quad X_i, X_r \in C^\infty(\mathbb{X})$$

correspondientes a la familia de álgebras $\mathbb{X}_{\star_\hbar}$. Por lo tanto, el típo de álgebra $\mathfrak{A}$, que aquí es $\mathbb{X}_{\star_\hbar}$, elegído en los modelos de cuantización algebraica influye en el proceso estocástico $\mathbb{X}(u,t)$ de los mercados financieros.

El objetivo $\mathfrak{O}_1$ queda demostrado. $\diamond$

Demostración del $\mathfrak{O}_2$: Debemos demostrar que el homomorfismo $\Phi : \mathfrak{A} \longrightarrow C^\infty(\mathfrak{M})$, entre las álgebras clásicas y cuánticas, explica la variación de las tasas de rendimiento $\tau = (\Gamma, \Xi, \Delta)$ (ver sección 2.2.1 definiciones 2.2.1 a 2.2.3), variación de precios, volatilidad, etc. de los mercados financieros.

Para lograr este objetivo consideramos los ingredientes que conforman la triada

$$(\tau, \mathcal{G}, \Phi : \mathfrak{A} \longrightarrow C^\infty(\mathfrak{M}))$$

donde: τ es la tasa, $\mathcal{G}$ es el grupo, y Φ es el homomorfismo.

Una estrategia consiste en remplazar en la definición (2.2.7), condición 5, la estructura de grupo $\mathcal{G}$ por una estructura de un álgebra de Poisson $C^\infty(\mathfrak{M})$ de funciones continuas diferenciables[24] sobre la variedad $\mathfrak{M}$. Luego, considerando las definiciones 2.2.8 y 2.4.14 logramos el álgebra deformado $\mathfrak{A}$ que pertenece a la familia de álgebras deformadas $\mathcal{A}_{\star_\hbar}$. Además, considerando la definición general de cuantización y las de la sección 2.5.3, establecemos la siguiente proposición

Proposición 2.3.1. Un morfismo $\mathbb{K}$ lineal Φ es un homomorfismo del álgebra $\mathfrak{A}$ hacia el álgebra[25] $C^\infty(\mathfrak{M})$ si para cada par de observables f, g en C^∞ (M), $\Phi : \mathfrak{A} \longrightarrow C^\infty(\mathfrak{M})$ definido por

$$\Phi(f) = lim_{\hbar\to 0} f(\hbar, x)$$

y cumple las siguientes condiciones:

1. Para cualquier par de puntos $x_1, x_2 \in \mathfrak{M}$ existe una función $f(x) \in \Phi(\mathfrak{A})$ tal que $f(x_1) \neq f(x_2)$,

2. $\Phi(\frac{1}{\hbar}(f * g - g * f)) = \{\Phi(f), \Phi(g)\}$, donde $\star_\hbar$ denota la multiplicación en $\mathfrak{A}$ y $\{.,.\}$ denota el corchete de Poisson en $C^\infty(\mathfrak{M})$,

3. $\Phi(f^\sigma) = \Phi(f)$, donde $f \to f^\sigma$ representa la involución en $\mathfrak{A}$.

Donde $\{.,.\}$ es el corchete de Poisson y $\star_\hbar$ es el producto $\star$ deformador del álgebra $C^\infty(\mathfrak{M})$, que depende del parámetro $\hbar$.

De la sección 2.2.1 y de la definición 2.2.1, condición 3, los elementos de 3a, 3b, 3c: la tasa del proceso de mercado de dinero libre de riesgo (Γ); la tasa media de retorno del proceso (Ξ) y la tasa de retorno de dividendos del proceso (Δ), respectivamente, son funciones lineales continuas diferenciables en un periodo de tiempo de maduración

[24] Estas funciones describen la conducta del conjunto de activos de los mercados financieros o describen el comportamiento del conjunto de mercados financieros globalizados.

[25] Enfatizamos que, $C^\infty(\mathfrak{M})$ es el álgebra de funciones diferenciables sobre una variedad $\mathfrak{M}$ con las operaciones usuales de suma y multiplicación.

$[0, T]$. Luego, estas funciones son elementos del álgebra de Poisson $C^{\infty}(\mathfrak{M})$ que satisfacen la proposición 2.3.1. Es decir, el álgebra es cuantizable.

Por lo tanto, de la definición 2.4.14 estamos frente a una familia de series formales

$$f \star_{\hbar} g = f \cdot g + \sum_{j \geq 1} B_j(f, g)\hbar^j \quad \text{para} \quad f, g \in C^{\infty}(\mathfrak{M})$$

Concluimos que si las tasas de los mercados financieros están explicadas por funciones continuas en $C^{\infty}(\mathfrak{M})$ que satisfacen la proposición 2.3.1, entonces el homomorfismo Φ influye en la explicación de la performance de las tasas compuesta $\tau = (\Gamma, \Xi, \Delta)$ de los mercados financieros. El objetivo $\mathfrak{O}_\mathbf{2}$ queda demostrado. $\diamond$

Demostración del $\mathfrak{O}_\mathbf{3}$: Por demostrar que los espacios clásicos $(\mathfrak{M}, w)$ y cuánticos $(\mathfrak{M}', w')$ influyen en el análisis de la volatilidad Θ.

Primero: el espacio clásico $(\mathfrak{M}, w)$. En el espacio clásico financiero existen muchas maneras de definir y calcular la volatilidad, en particular la volatilidad de los mercados financieros.

Si un sistema de mercados de capitales tiene N activos (N grados de libertad) su espacio fase es un espacio lineal real $\mathbb{R}^{2n}$ de dimensión $2n$ y los observables son las funciones $f, g, h, \cdots$, que describen el comportamiento de una gran variedad de caracteristicas de los mercados financieros, con $f(p, q) \in \mathbb{R}^{2n}$ y $(p, q) = (p_1, p_2, ..., p_n, q_1, q_2, ..., q_n)$ donde los p_i y los q_i son los momentos y las coordenadas de posición, respectivamente. Por instancia, el retorno de un activo(s) (o mercado(s)) puede ser descompuesto en su amplitud de variación (volatilidad) y en su tendencia (el signo que indica la dirección de su desplazamiento), entonces definimos su volatilidad, en el espacio clásico, como una función real diferenciable $f(t, \Delta t)$ que depende del tiempo y el periodo de maduración de la negociación. Así podriamos mencionar una gran variedad de conceptos y aplicaciones concretas que enfocan el estudio de la volatilidad de los mercados financieros.

Luego, se concluye que el espacio clásico permite el estudio y análisis de la volatilidad de los mercados financieros.

Segundo: el espacio cuántico $(\mathfrak{M}', w')$**.** En el sistema mecánico cuántico tenemos el espacio de estados de configuraciones de Hilbert (en nuestro caso el espacio de series formales de potencias de álgebras no conmutativas) correspondiente conformado por funciones $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ de n variables, que podrían ser variables aleatorias, con un cuadrado sumable.

Los operadores en $\hat{p}_k, \hat{q}_k$ en $L^2(\mathbb{R}^n)$ son comparados con el momento clásico y las coordenadas p_k, q_k usando las siguientes fórmulas

$$(\hat{q}_k f)(x) = x_k f(x) \quad \text{y} \quad (\hat{p}_k f)(x) = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial f}{\partial x_n}$$

Podemos ver claramente que el espacio de observables de la mecánica clásica está relacionada con el espacio de observables de la mecánica cuántica en los que en ambos se estudian y aplican muchos conceptos financieros. Por lo tanto, en particular en ambos se estudian y analizan la volatilidad de los mercados finacieros, como concretamente explicamos en el capítulo de aplicaciones.

Por lo tanto, los espacios fases del modelo de cuantización algebraica influyen en el análisis de la volatilidad.

El objetivo $\mathfrak{O}_3$ queda demostrado. ◇

Demostración del $\mathfrak{O}_4$: Debemos demostrar que las operaciones de desplazamiento paralelo e involuciones de los activos financieros en los mercados determinan una estructura geométrica fibrada en el sistema mecánico cuántico. Más preciso, acoplamos las variedades de Poisson y las álgebras de Poisson, como objetos fundamentales de la cuantización, en la estructura de un espacio fibrado $\mathfrak{B}$ definido en la sección (2.2.2) para luego describir la acción de las álgebras en la construcción de las reglas de intercambio financiero y transporte paralelo de la variación de las cárácteristicas de los activos y variación de la volatilidad Θ de los mercados financieros.

Consideremos un conjunto finito de activos $A = \{a_0, a_1, \cdots, a_N\}$ cuyas características cambian en el tiempo y asumamos que existen por lo menos dos activos en A que se pueden intercambiar entre ellos en cualquier momento, entonces el conjunto A forma una estructura fibrada de los mercados financieros.

La demostración se basa en la construcción de un espacio topológico fibrado $\mathfrak{B} = (\mathcal{E},\ \pi,\ B,\ F,\ \mathcal{G},\ \{\phi_j, v_j\})$, definido en (2.2.7), utilizando el conjunto de activos de A. Para lograr nuestro propósito consideramos el siguiente procedimiento:

Primero, construimos la base B de $\mathfrak{B}$. Para lo cual ordenamos el conjunto completo de los activos dándole una enumeración de 0 a N. Este conjunto de activos puede ser representado por, $N+1$, puntos en el plano bidimensional o en el espacio tridimensional (o en un espacio de dimensión arbitraria). Como el dinamismo de los activos de los mercados financieros ocurre en el tiempo, requerimos introducir una copia del tiempo[26] $\mathbb{T} = \mathbb{Z} = \{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\}$ a cada punto del activo $a_i, i = 0, 1, \cdots, N$. Adjuntando, multiplicando, el conjunto de activos y el tiempo resulta la base del espacio fibrado

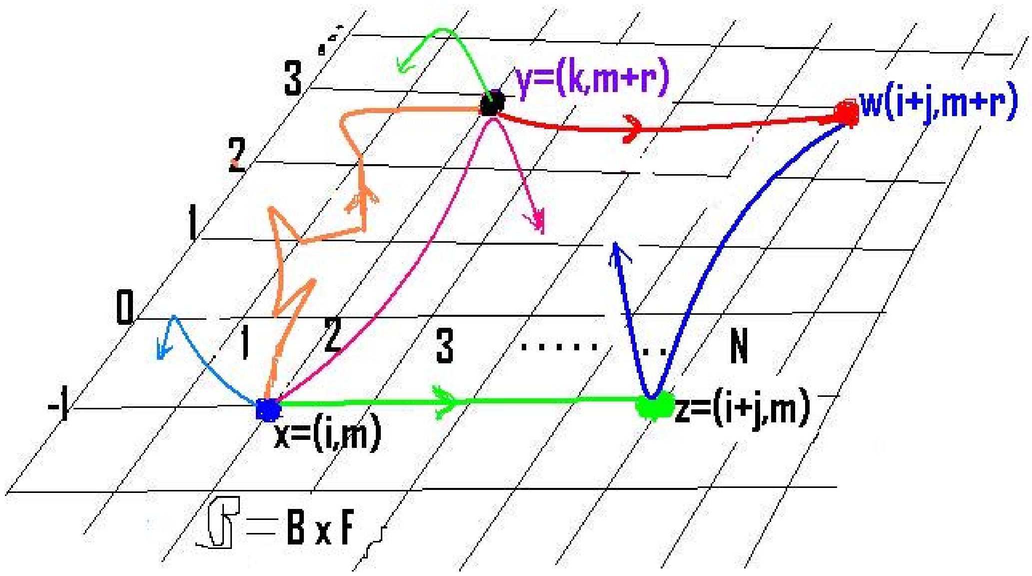
$$B = \{0, 1, 2, 3, \cdots, N\} \times \mathbb{Z}$$

Segundo, definimos la conexidad de la base B el cual será la clave para definir un camino[27], ver [46], en B. Estas funciones continuas son los elementos cruciales de nuestra álgebra de Poisson que nos señalarán las trayectorias o existencia de homotopías de caminos de la variación de las características y propiedades, por ejemplo de precios, de los activos en los mercados financieros. Para continuar la demostración debemos

[26] Adoptamos el tiempo discreto desde que todas las negociaciones ocurren de manera natural en el tiempo dscreto.

[27] Un camino es una función continua $\gamma : [0,1] \longrightarrow B$ tal que para $x, y \in B, \gamma(0) = x$ y $\gamma(1) = y$ es el punto inicial y punto final del camino, respectivamente.

Figura 2.12: Base de un espacio fibrado visto como un escenario de actividades financieras.



Fuente: Elaboración propia.

construir una matriz de enlaces o conexiones $\mathcal{C}$ entre los activos $a_i, i = 0, 1, \cdots, N$.

sea la matriz $\mathcal{C} : B \times B \longrightarrow \{-1, 0, 1\}$ definido por la siguiente regla: para cualquier $x \equiv (i, n) \in B$ y $y \equiv (k, m) \in B$ tal que $\mathcal{C}(x, y) = 0$ excepto para: **(1)** $i = k$ y $n = m - 1$, cuando el i ésimo activo a_i existe en el n ésimo instante y este instante no es la fecha de expiración del activo.

(2) $n = m$ y en el n ésimo instante de tiempo el i ésimo activo a_i puede ser intercambiado con alguna cantidad del k ésimo activo a_k a alguna tasa de cambio. Puntualizamos aquí que la antisimetría, $\mathcal{C}(x, y) = 1 = -\mathcal{C}(y, x)$, se cumple.

Ahora, usando la matriz $\mathcal{C}(x, y)$ definimos una curva simple $\gamma(x, y)$ en B el cual une los puntos $x, y \in B$. La curva $\gamma(x, y)$ en B es equivalente a $\{x_j\}_{j=1}^{r}$ con puntos finales $x, y \in B$ y $r - 1$ segmentos, para $x = x_1, \cdots, x_r = y$ para todo x_j en B y así

$$\mathcal{C}(x, y) = \pm 1 \qquad \text{para todo} \qquad j = 1, 2, , \cdots, r - 1$$

Esta base B es conexa desde que por lo menos existe un activo a_k para $k = 0, 1, 2, \cdots, N$ el cual puede ser intercambiado con algún otro activo y por lo tanto esto define la curva conectando cualquier par de activos. Esto completa la construcción de la base del espacio fibrado.

Tercero, definimos la estructura de grupo $\mathcal{G}$ del fibrado, más aún, hacemos que este grupo $\mathcal{G}$ se transforme en un álgebra de Poisson $C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$. La estructura de grupo $\mathcal{G}$ que usamos es un grupo de funciones continuas (caminos o trayectorias) $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ bajo la operación de multiplicación de funciones y que además cumplen los postulados de un álgebra de funciones continuas sobre el espacio fibrado. Estas funciones de transición del fibrado con esta estructura de grupo corresponden a los caminos o curvas formadas por los movimientos de los activos por efecto de sus tasas de intercambios, factores de descuentos, inflación, etc.

Finalmente, el último paso de la construcción es la definición de las fibras F de $\mathfrak{B}$. Pero, esto es inmediato. Por la definición (2.4.5) definimos a las fibras del espacio fibrado como:

$$F = \mathcal{G} \equiv C^{\infty}(\mathbb{R}^n) \qquad \text{fibrado principal}$$

En este caso, la dinámica cambiante de los espacios fibrados corresponde a la dinámica de los cambios de precios y tasas de los activos de los mercados financieros en el tiempo.

Otra opción consiste en definir a las fibras $F = \mathbb{R}^+$ el que nos ayudará a describir el fujo de caja de deudas. En este caso la sección cruzada[28] del espacio fibrado nos da el número de unidades del i ésimo activo a_i en el momento de tiempo m.

Luego, el espacio fibrado construido es $\mathfrak{B} = (\mathcal{E} \times F,\ \pi,\ B,\ F,\ \mathcal{G},\ \{\phi_j, v_j\})$, o brevemente $\mathfrak{B} = \{0, 1, 2, \cdots, N\} \times \mathbb{Z} \times F$ que coincide con la definición (2.5.4), el espacio fibrado trivial.

[28] Una sección cruzada es una regla $S : x = (i, m) \in B \longrightarrow \mathcal{E}$ del espacio fibrado $\mathfrak{B}$ que asigna un punto específico $S(x)$ sobre cada fibra de F. Más detalle ver definición (2.4.6).

De todo esto, concluimos que iniciando con un conjunto de activos que conforman un mercado financiero arbitrario se logra demostrar que el comportamiento dinámico de estos activos generan una estructura topológica fibrada en el que se promulgan una gran variedad de leyes y propiedades económicas, financieras y contables. Por lo tanto, el objetivo $\mathfrak{O}_4$ queda demostrado. $\diamond$

Demostración del $\mathfrak{o}_5$: Debemos probar que las propiedades topológicas del espacio fase clásico $(\mathfrak{M}, w)$ y las propiedades topológicas del espacio fase cuántico $(\mathfrak{M}^{'}, w^{'})$ describen la aleatoriedad de los mercados financieros.

Primero: Espacio fase clásico

Por la sección 2.2.1 (definición 2.2.1), ecuación 2.2, el espacio de estados de los mercados financieros está explicado por el proceso estocástico subyacente $\mathbb{X}(u, t)$, definición 2.4.2, que consiste de una familia de variables aleatorias definidas sobre el espacio de probabilidades $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, definición 2.2.1 parte 1, donde Ω es el espacio muestral que involucra todos los posibles estados de los mercados financieros en un periodo de maduración $[0, T]$ o en un subperiodo local.

Una estrategia consiste en hacer que el espacio muestral Ω sea homeomorfo[29] al espacio topológico $(\mathbb{R}^{2n}, \tau_{prod})$ y este último sea generado por el σ-álgebra $\mathcal{F}$ de Borel de conjuntos abiertos (cilindros abiertos) de elementos de la topología producto. Además, [29], como ya es conocido las variables aleatorias en general (y en particular las que explican el comportamiento aleatorio de los mercados financieros) se definen sobre un espacio muestral Ω.

Por otro lado, debido a que el escenario de la construcción de los modelos de cuantización algebraica de los mercados financieros tiene sus origenes sobre una variedad

[29] Esto significa que Ω y $(\mathbb{R}^{2n}$ son topológicamente iguales; esto es, cualquier propiedad topológica que disfruta Ω es compartida con $(\mathbb{R}^{2n}$ y conversamente.

simpléctica o una variedad de Poisson $\mathfrak{M}$, definicion 2.2.3.2, y por el teorema de Jean Darboux toda variedad simpléctica $(\mathfrak{M}, \omega)$ es localmente homeomorfa a $\mathbb{R}^{2n}$. Eso significa[30] que, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que la variedad simpléctica en el cual establecemos el álgebra de Poisson, definición 2.4.8, es $\mathbb{R}^{2n}$. Esta álgebra es a la vez una estructura de álgebra de Lie sobre el espacio fase $C^{\infty}(\mathbb{R}^{2n})$ de funciones diferenciables de variables aleatorias continuas. Aquí el corchete de Poisson esta definido como aquel de la definición 2.2.8 del producto de Moyal.

Ahora, damos las propiedades topológicas del espacio topológico $\mathbb{R}^{2n}$ que tiene una identidad canónica $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{2n}$ y es el espacio lineal Euclideano real de dimensión $2n$, y como ya hemos mencionado definición 2.2.3.2 y 2.4.8, los observables son funciones $f(p, q)$ con $(p, q) \in \mathbb{R}^{2n}$ tal que

$$((p_1, p_2, \cdots, p_n), (q_1, q_2, \cdots, q_n) = (p_1, p_2, \cdots, q_n, q_1, q_2, \cdots, q_n))$$

En particular, si el sistema de los mercados financieros tiene n grados de libertad su espacio fase es precisamente $\mathbb{R}^{2n}$ donde p_i son los momentos y q_i las coordenadas.

Este espacio fase $\mathbb{R}^{2n}$ posee muchas propiedades topológicas como: conexidad, simplemente conexidad, Hausdorff, compacticidad local de subconjuntos cerrados y acotados etc. La propiedad topológica que nos interesa y está garantizada su existencia (Segundo paso de la demostración del $\mathfrak{o}_4$ y la definición 2.4.7). Por lo tanto, las variables aleatorias que identifican a los procesos estocásticos que describen la conducta de los mercados financieros están definidas e influenciadas por las propiedades topológicas de estos espacios topológicos puesto que constituyen el cimiento y soporte de su definición. Para el caso de $\mathbb{R}^{2n}$ estamos frente a un espacio vectorial aleatorio, como se demostró en

[30] Si $(\mathfrak{M}, \omega)$ es una variedad simpléctica de dimensión $2n$, donde ω es la 2-forma simpléctica, entonces para cada punto $p \in \mathbb{M}$ existe una carta local $(U_p : \{q_i, p_i\}, i = 1, 2, 3, \cdots, n)$ que contiene a p tal que ω tiene la forma $\omega = \sum_{i=1}^{n} dq_i \wedge dp_i$.
Más detalle ver A Course of Differential Geometry and Topology, Mishchenko A. and Fomenko A. Mir Publishers Moscow.

el $\mathfrak{o}_1$, topológico. Más aún, como $C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ es un espacio de funciones diferenciables existen una diversidad de métricas, por ende topologías, definidas sobre estos espacios de funciones.

Segundo: Espacio fase cuántico

En el caso de un sistema cuántico se tiene un espacio lineal de las series formales $C^\infty(\mathbb{R}^{2n})[[\hbar]]$ dadas en las definiciones 2.4.13 y 2.4.14 que preservan las propiedades topológicas del espacio fase clásico. Sólo ocurre un cambio en la deformación del álgebra clásico que dependerá del parámetro $\hbar$ y de la familia de productos estrella $\star_\hbar$.

De ambos espacios, clásico y cuántico, se concluye que la aleatoriedad está afectada, descrita y explicada por las propiedades topológicas del espacio ambiental (la base del espacio fibrado definición 2.2.7) donde se definen las variables aleatorias y que éstas influyen en el comportamiento de los mercados financieros.

El objetivo $\mathfrak{o}_5$ queda demostrado. ◇

Finalmente, basándonos en la demostración de cada objetivo de la tesis, el teorema fundamental queda demostrado[31]. Es decir, queda demostrado que los modelos de cuantización algebraica influyen sustancialmente en el análisis de los mercados financieros de capitales. En la siguiente sección, considerando las mismas notaciones anteriores, definimos y describimos el modelo proclamado y en el capítulo siguiente presentamos los resultados de su evaluación en casos concretos.

[31] Para una formalidad integral de la demostración del teorema se debe probar la doble implicación. Pero, debido al carácter descriptivo de la implicancia del modelo $(\mathcal{M}, \mathfrak{B}, \mathfrak{Q})$ en los mercados financieros $\mathcal{M}$, sólo demostramos la condición necesaria. Es decir, el cumplimiento de los objetivos implican que el modelo es válido.

2.3.1. Definición del modelo $(\mathcal{M}, \mathfrak{B}, \mathfrak{Q})$

Sea $\mathfrak{M} = B$ una variedad de Poisson (definición 2.4.9) la base de un espacio fibrado $\mathfrak{B}$ (definición 2.2.7) provisto de una estructura de álgebra de Poisson (definición 2.4.8) de funciones diferenciables $f, g, h, \cdots$ en el espacio $C^\infty(\mathfrak{M})$, con respecto a la multiplicación usual, en el sistema mecánico clásico $(\mathfrak{M}, \omega)$ y sea $\mathcal{E} = \mathfrak{M}^{‘}$ el espacio total del espacio fibrado $\mathfrak{B}$ provisto de una familia de álgebras asociativas $C^\infty(\mathfrak{M})[[\hbar]]$ no conmutativas de series formales de potencias $f \star_\hbar g$ en $C^\infty(\mathfrak{M})[[\hbar]]$ sobre un espacio subyacente de la mecánica cuántica $(\mathfrak{M}^{‘}, \omega^{‘})$. Definimos el modelo de cuantización algebraica de los mercados financieros como la sección cruzada[32]

$$\Psi : (C^\infty(\mathfrak{M}), \{.,.\}) \longrightarrow (C^\infty(\mathfrak{M})[[\hbar]], \star_\hbar)$$

tal que para cualquier f, g, h en $C^\infty(\mathfrak{M})$ la expresión

$$\Psi(f,g) = |f \star_\hbar g| = \left| f \cdot g + \sum_{j=1}^{\infty} B_j(f,g)\hbar^j \right| \leq R \tag{2.15}$$

existe. De donde, por analogía a las consecuencias de la definición 2.2.7, se tiene

1. $C^\infty(\mathfrak{M}) \cong C^\infty(\mathfrak{M})[[\hbar]]/\hbar$ como álgebras y la multiplicación $\star_\hbar$ en $C^\infty(\mathfrak{M})[[\hbar]]$ denominado el producto estrella $\star_\hbar : C^\infty(\mathfrak{M})[[\hbar]] \times C^\infty(\mathfrak{M})[[\hbar]] \longrightarrow C^\infty(\mathfrak{M})[[\hbar]]$ cuyos valores son determinados sobre el subespacio $C^\infty(\mathfrak{M}) \subset C^\infty(\mathfrak{M})[[\hbar]]$

2. $\Pi\Psi\left((f,g), f \star_\hbar g\right) = I_{C^\infty(\mathfrak{M})}$, donde Π es la proyección del espacio fibrado.

3. $|f \cdot g| \leq R$, donde $\cdot$ es la operación multiplicación del álgebra en el sistema clásico y R es un valor real, elegido a criterio del usuario del modelo, el inversionista. Cuanto más pequeño es R el modelo es más ”estricto“.

[32] Ver sección cruzada, definición 2.4.6, sección 2.4.2, conceptos de espacios fibrados.

4. Los coeficientes $B_j : C^\infty(\mathfrak{M}) \otimes C^\infty(\mathfrak{M}) \longrightarrow C^\infty(\mathfrak{M})$ son polidiferenciables[33].

5. El corchete de Poisson sobre $C^\infty(\mathfrak{M})$ es definido por

$$\{f, g\} = \frac{f \star_\hbar g - g \star_\hbar f}{2\hbar}\Big|_{\hbar=0} = \frac{1}{2}(B_1(f,g) - B_1(g,f)), \forall f, g \in C^\infty(\mathfrak{M})$$

   este corchete actúa como derivaciones en ambos parámetros y satisface la identidad de Jacobi, ver definición 2.4.8.

6. En estas estructuras cuánticas existe un parámetro de deformación $\hbar$ de los modelos, indicador de la escala de deformación, que gobierna la no conmutatividad del álgebra de funciones. De la definición 2.2.9 **1a** $\hbar$ toma valores reales positivos y para cada valor fijo de $\hbar$ se obtiene un modelo de cuantización algebraica. Luego, existen infinitos modelos. En particular, para $0 < \hbar \leq 1$.

7. **Caso particular:** para f, g en $C^\infty(\mathfrak{M})$ sobre el cual definimos el corchete de Poisson $\{f, g\} : C^\infty(\mathfrak{M}) \times C^\infty(\mathfrak{M}) \longrightarrow C^\infty(\mathfrak{M})$ que a cada par observables físicos le asocia un tercer observable expresado como

$$\{f, g\} = \sum_{j=1}^{n} (\frac{\partial f}{\partial q_j}\frac{\partial g}{\partial p_j} - \frac{\partial g}{\partial q_j}\frac{\partial f}{\partial p_j})$$

   y asociando esta definición con la definición 2.2.8, ecuación (2.9), se restringe el modelo de (2.15) en su forma más simple

$$\Psi(f, g) = |f \star_\hbar g| = \left|f \cdot g + B_1(f, g)\hbar + O(\hbar^2)\right| \leq R$$

   o equivalentemente

$$\Psi(f, g) = |f \star_\hbar g| = \left|f \cdot g + 2\{.,.\}\hbar + O(\hbar^2)\right| \leq R$$

[33] En particular, para el término de primer orden B_1 por la condición de asociatividad de la expanción de (2.15) se obtiene $B_1(fg, h) + B_1(f, g)h = fB_1(g, h) + B_1(f, gh)$ que es el 2-cociclo de Hochschild.

o equivalentemente

$$\Psi(f,g) = |f \star_\hbar g| = \left| f \cdot g + 2\hbar \sum_{j=1}^{n} (\frac{\partial f}{\partial q_j} \frac{\partial g}{\partial p_j} - \frac{\partial g}{\partial q_j} \frac{\partial f}{\partial p_j}) + O(\hbar^2 \right| \leq R$$

Este caso particular representa al modelo en su forma más aplicable a casos concretos en los mercados financieros donde $q = (q_1, q_2, \cdots, q_n)$ y $p = (p_1, p_2, \cdots, p_n)$ y los $f(p,q)$ están en $\mathbb{R}^{2n}$ son las coordenadas de momento y posición.

El caso más usual ocurre cuando la variedad de Poisson $\mathfrak{M}$ es igual a $\mathbb{R}^{2n}$.

En particular, el caso aún más simple ocurre cuando la variedad $\mathfrak{M} = \mathbb{R}^2 = \{(p,q)\}$ equipado con la forma simpléctica $w = 2dp \wedge dq$ y el bivector de Poisson correspondiente es $\alpha = 2\partial_p \wedge \partial_q$.

En este caso, el corchete de Poisson sobre $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ es dado por

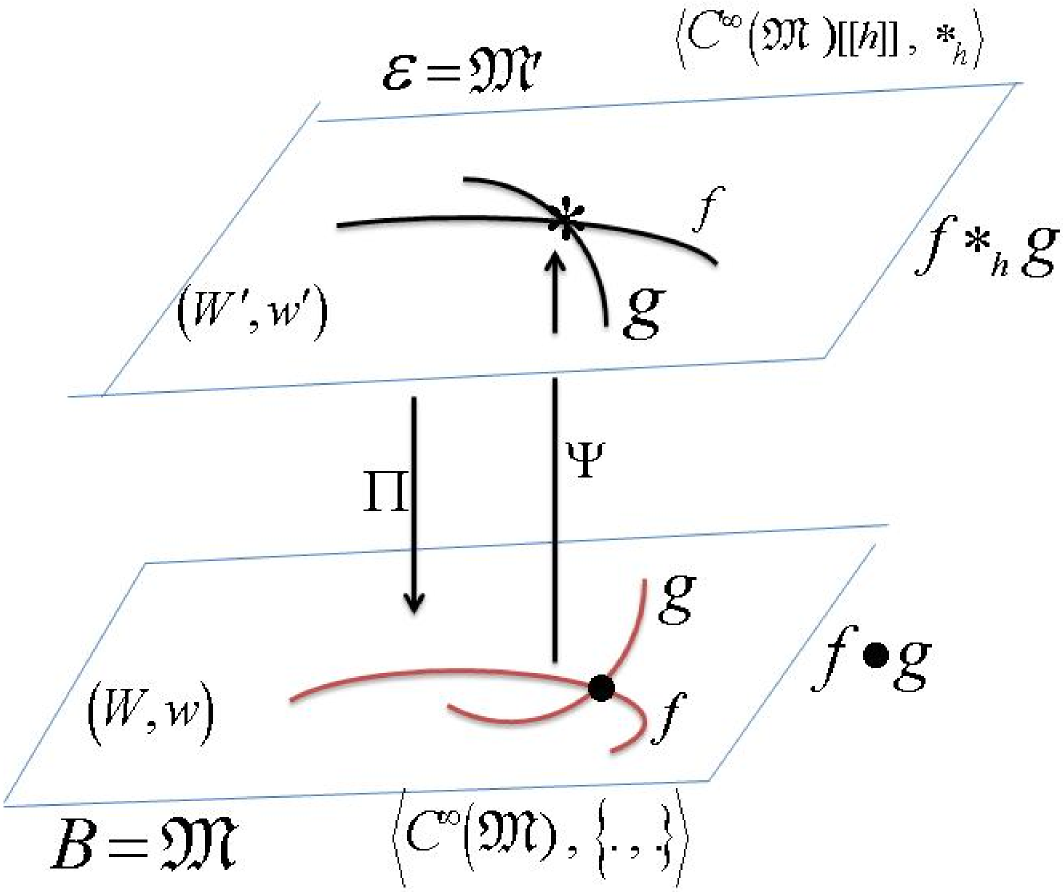
$$\{f,g\} = \frac{\partial f}{\partial x_p} \frac{\partial g}{\partial x_q} - \frac{\partial g}{\partial x_q} \frac{\partial f}{\partial x_p}$$

luego, remplazando en la última expresión obtenemos

$$\Psi(f,g) = |f \star_\hbar g| = \left| f \cdot g + 2\hbar (\frac{\partial f}{\partial x_p} \frac{\partial g}{\partial x_q} - \frac{\partial g}{\partial x_q} \frac{\partial f}{\partial x_p}) + O(\hbar^2) \right| \leq R$$

y es el modelo de cuantización algebraica de los mercados financieros en su forma más simple. La valoración de la cota superior R del modelo, establecido en su definición, puede tomar valores como $R = 0, \cdots, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, 2, 3...$, dependerá de la rigurosidad del inversionista permitiendo una apropiada amplitud (“cinturón financiero”) del modelo de cuantización que describe las actividades de intercambio en los mercados finacieros. Es decir, el inversionista siempre deseará que el radio R del “cinturón financiero” sea lo más pequeño (lo más ajustado) posible, lo que indíca baja variabilidad. Por instancia, $R = 0$ significa que las funciones que describen la variación de precio (tasa de retorno, volatilidad, etc.) de los activos son constantes (variabilidad cero). En otras palabras, coincide con lo que, por analogía, otros modelos sustentan (por ejemplo, en el modelo CAPM) la variabilidad de su portafolio de activos tenga varianza mínima (o riesgo mínimo). La contraparte opuesta de esta situación es cuando $R > 1$. Es decir, existe alta variabilidad del comportamiento de los activos financieros, volatilidad notoria (riesgo notorio). Lo más recomendable para una buena performance del modelo es mantener a $0 < R \leq 1$, como mostramos en las aplicaciones en el capítulo de resultados. La Figura 2.13 mues-

Figura 2.13: Visualizacón espacial de la difinición del modelo $(\mathcal{M}, \mathfrak{B}, \mathfrak{Q})$ sobre los espacios de configuraciones clásico y cuántico y sus interacciones topológicas y algebraicas.



Fuente: Elaboración propia.

tra el panorama de la definición del modelo financiero de cuantización algebraica en los mercados financieros en el ambiente de los espacios fibrados, presentados en la sección 2.2.2, donde actúan los mercados financieros por las acciones de las álgebras de funciones diferenciables, como se explica en el capítulo de resultados y aplicaciones.

El propósito de la definición con maquillaje acotado tiene significado de limitar la variación explosiva de los valores de las series formales de potencias que sólo debe oscilar dentro de un radio de convergencia R y así podriamos controlar la variabilidad caótica de las funciones involucradas en la expansión de las series que describen la conducta de precios, tasas de intercambio, futuras tasas de interés, índices de "stocks", que financieramente se interpretan y perciben como cambios riesgosos y son indicios de volatilidad de los mercados financieros.

2.4. Definiciones Conceptuales

En esta sección presentamos algunos conceptos involucrados en las variables que conforman el título de la tesis, modelos de cuantización algebraica de los mercados financieros de capitales y otros conceptos intermitentes al tema.

2.4.1. Conceptos de Mercados Financieros

Definición 2.4.1. (Volatilidad) En finanzas, es una medida para la variación del precio de un instrumento financiero en el tiempo.

Existen muchas definiciones de volatilidad, dependientes del enfoque y puntos de vista. Aquí enfocamos el punto de vista de la estadística financiera.

Supongamos que el "stock" S toma el valor S_0 (conocido) en el momento 0 y la variable aleatoria (v.a) S_1 en el momento 1. Podemos definir la variabilidad del "stock" S mediante la varianza de la v.a. $\frac{S_1}{S_0}$, el cual es lo mismo que la varianza del retorno sobre el "stock" $R_s = \frac{S_1 - S_0}{S_0}$ que es una v.a. Bernoulli con probabilidad p si $s = b$ y probabilidad $1 - p$

si $s = a$ y con media $\mu_s = a + p(b-a)$ y varianza $\theta_s^2 = p(1-p)(b-a)^2$. Entonces $\theta_s = \sqrt{p(1-p)}(b-a)$ es la medida inherente en el precio del "stock" S que es llamado **volatilidad** del "stock" S. Luego, con una asignación inicial de probabilidad $(p, 1-p)$ el riesgo es proporcional a $(b-a)$ y crecen con el crecimiento de la separación de los valores de a y b como es esperado.

Por otro lado, supongamos $[0, T]$ es un horizonte de negociación de longitud T, entonces la volatilidad generalizada es dada por

$$\theta_T = \theta\sqrt{T} \tag{2.16}$$

donde θ es la volatilidad anualizada. Luego, si el retorno diario de un "stock" tiene desviación estándar θ_{SD} y el periodo del tiempo de retornos es P, la volatilidad anualizada es

$$\theta = \frac{\theta_{SD}}{\sqrt{P}} \tag{2.17}$$

Una suposición común es $P = 1/252$, hay 252 dias de negociación en un año.

La fórmula (2.17) para convertir medidas de retornos y volatilidades de un periodo a otro siguen un acercamiento a las extrapolaciones de un camino aleatorio o proceso Browniano cuyos pasos tienen varianza finita. Sin embargo, más generalmente, para procesos estocásticos naturales la relación precisa entre medidas de volatilidad para diferentes periodos de tiempo es más complicado. Algunos usan la función exponencial de estabilidad α de Lévy

$$\theta_T = T^{\frac{1}{\alpha}}\theta \tag{2.18}$$

para extrapolar procesos estocásticos naturales. Si $\alpha = 2$ se obtiene el proceso Browniano. Cuando $\alpha < 2$ es apropiado para actividades financieras como "stocks", indices, y otros.

Definición 2.4.2. (Proceso Estocástico).- Un proceso estocástico $\mathbb{X} = \{X(t) : t \in \mathbb{T}\}$ es una colección de variables aleatorias. Esto es, para cada $t \in \mathbb{T}$, $X(t)$ es una variable aleatoria.

El índice t es frecuentemente interpretado como el tiempo y, como resultado, nos referimos a $X(t)$ como el estado del proceso en el momento t. Por ejemplo, $X(t)$ podría ser el número de activos ofrecidos en el mercado A en el momento t.

Una notación $\mathbb{X}(t) = (X_1(t), X_2(t), \cdots, X_D(t)), 0 \leq t \leq T$ denota un proceso estocástico de dimensión D. El conjunto $\mathbb{T}$ es llamado el conjunto de índices del proceso. Cuando $\mathbb{T}$ es un conjunto contable el proceso estocástico es dicho proceso estocástico de tiempo discreto. Si $\mathbb{T}$ es un intervalo de la linea real el proceso estocástico es dicho proceso estocástico de tiempo continuo. Por instancia, $\{X_n : n = 0, 1, 2, \cdots\}$ es un proceso estocástico discreto indexado por los números enteros nonegativos $\mathbb{T} = \mathbb{N}$; mientras que $\{X(t) : t \geq 0\}$ es un proceso estocástico de tiempo continuo indexado por los reales no negativos $\mathbb{R}^+$.

Definición 2.4.3. (Proceso Estocástico Browniano).- Si consideramos un camino aleatorio simétrico en el que damos un paso a la izquierda o a la derecha con igual probabilidad. Es decir, es una cadena de Markov con $P_{1,i+1} = \frac{1}{2} = P_{i,i-1}$ para $i = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$.

Ahora supongamos que apuramos nuestros pasos haciendo que los intervalos de tiempo de cada paso sean cada vez más pequeños. Si ahora tomamos el límite cuando el diferencial del tiempo Δt tiende a cero obtenemos el proceso Browniano o a veces llamado el proceso de Wiener.

Un Proceso estocástico $\{X(t), t \geq 0\}$ es dicho ser un proceso Browniano si

(i).- $X(0) = 0$;

(ii).- $\{X(t) : t \geq 0\}$ tiene incrementos independientes y estacionarios;

(iii).- para todo $t > 0, X(t)$ es normalmente distribuido con media 0 y varinaza $\sigma^2 t$.

Este proceso, por su misma característica, tiene muchas aplicaciones en las finanzas para describir el comportamiento de precios de opciones del "stock”, arbitraje, y fórmula de valoración de precios de Black-Scholes, etc.

2.4.2. Conceptos de Espacios Fibrados

Definición 2.4.4. (Espacio fibrado trivial).- Un espacio fibrado $\mathfrak{B}$ con fibra F es trivial si $\mathfrak{B}$ es isomorfo con el espacio fibrado $(B \times F, \pi, B)$, donde B es espacio base del fibrado y $\pi : B \times F \longrightarrow B$ es la función proyección suryectiva suave. Consideramos este espacio fibrado trivial en la construcción de los modelos de cuantización algebraica de los mercados financieros.

Definición 2.4.5. (Espacio fibrado principal).- Es un espacio fibrado cuya fibra F coincide con su estructura de grupo $\mathcal{G}$, el cual acciona sobre la fibra $F = \mathcal{G}$ por traslaciones por el lado derecho $R_g : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}, R_g(x) = xg$ con $g \in \mathcal{G}$.

Definición 2.4.6. (Sección cruzada).- Una sección cruzada de un espacio fibrado es una función $\Psi : B \longrightarrow \mathcal{E}$ tal que $\pi\Psi = 1_B$. Es decir, $\Psi(x) \in F_x$ para cada $x \in B$.

Definición 2.4.7. (conectividad).- Un espacio fibrado con conexión (o conexo) puede ser imaginado como una familia $\{F_b\}$ de fibras (cuya unión $\cup_b F_b$ es el espacio total $\mathcal{E}$) el cual es también proveido con la regla de desplazamiento paralelo.

Dado cualquier camino $\gamma(t), a \leq t \leq b$ en el espacio base B la conexión define una regla para desplazar paralelamente la fibra F a lo largo del camino $\gamma(t)$ desde su lado inicial hacia su lado final. Es decír, la función

$$\Phi_\gamma : F_{\gamma(a)} \longrightarrow F_{\gamma(b)}$$

satisfaciendo los siguientes requisitos naturales

(1) $\Phi(\gamma)$ depende continuamente del camino $\gamma(t)$;

(2) $\Phi(\gamma)$ es independiente de la parametrización del camino;

(3) $\Phi(\gamma)$ es la función identidad si $\gamma(t)$ es el camino constante;

(4) las siguientes ecuaciones toman a lugar:

$$\Phi(\gamma_1\gamma_2) = \Phi(\gamma_1)\Phi(\gamma_2), \quad \Phi(\gamma^{-1}) = (\Phi(\gamma))^{-1}$$

La conexión es la conexión de $\mathcal{G}$ si la función Φ_γ es definido como

$$\Phi_\gamma F_{\gamma(a)} = g(\gamma)F_{\gamma(b)} \quad g(\gamma) \in \mathcal{G} \text{ para todo } \gamma$$

Las propiedades de la función Φ_γ implica las mismas propiedades para la función $g(\gamma)$.

2.4.3. Conceptos de Cuantización Algebraica

Los objetos primarios en teoría de cuantización algebraica son las álgebras de Poisson, las variedades de Poisson, series formales de potencias, productos estrellas.

Definición 2.4.8. (Álgebra de Poisson).- es un espacio vectorial equipado con una estructura algebraica conmutativa y asociativa

$$(f, g) \to fg$$

y una estructura de álgebra de Lie

$$(f, g) \to \{f, g\}$$

que satisface la condición de compatibilidad

$$\{fg,h\} = f\{g,h\} + \{f,h\}g \tag{2.19}$$

Es decir, una estructura de Poisson sobre una variedad $\mathfrak{M}$ es una estructura de álgebra de Lie sobre $C^\infty(\mathfrak{M})$, llamado un *corchete de Poisson*,$\{.,.\}$, el cual satisface la regla de Leibniz en ambas entradas, donde, $\mathfrak{M}$ es equipado con una función antisimétrica bilineal

$$\{.,.\} : C^\infty(\mathfrak{M}) \times C^\infty(\mathfrak{M}) \to C^\infty(\mathfrak{M})$$

que satisface la identidad de Jacobi en ambas entradas, y para cualquier $f, g, h \in C^\infty(\mathfrak{M})$ se cumple (2.18), con una ecuación similar válido en la otra entrada.

Note que para un $h \in C^\infty(\mathfrak{M})$ fijo, (2.19) implica que $\{., h\}$ es en hecho una derivación sobre el anillo $C^\infty(\mathfrak{M})$, *i.e* existe un campo vectorial $\xi_h \in Vect(\mathfrak{M})$ tal que para cualquier $f \in C^\infty(\mathfrak{M}), \xi_h f = \{f, h\}$. Este campo vectorial es llamado *campo vectorial Hamiltoniano* de h. Si una de las funciones en el corchete es constante, entonces la regla de Leibniz demanda que el corchete debe ser igual a cero. Entonces, existe una función fibrada bien definida $F : T^*\mathfrak{M} \to T\mathfrak{M} : df|_P \mapsto \xi_f|_{\mathfrak{M}}$, o equivalentemente, existe un tensor w de orden 2 suave contravariante antisimétrico, tal que para cualquier

$$f, g \in C^\infty(\mathfrak{M}), \langle (df, dg)|w\rangle = \{f, g\}$$

Mencionamos un par de propiedades del corchete de Poisson:

(i). Dado un punto $p \in \mathfrak{M}$ y coordenadas locales $\{x^1, \cdots, x^n\}$ acerca de p, para cualquier punto q correspondiente en la coordenada de la vecindad de p

$$\{x^i, x^j\}(\mathfrak{M}) = \left\langle (dx^i, dx^j)|w\right\rangle(q) = w_{ij}|_q$$

y así el corchete es localmente determinado por el corchete de las proyecciones coordenadas.

(ii). Por la identidad de Jacobi, $\xi_{\{f,g\}} = -[\xi_f, \xi_g]$ para cualquier $f, g \in C^\infty(\mathfrak{M})$, y así la función $f \mapsto \xi_f$ es un álgebra anti Lie homomorfismo desde $C^\infty(\mathfrak{M})$ a $Vect(\mathfrak{M})$.

Definición 2.4.9. (Variedad de Poisson) es una variedad $\mathfrak{M}$ cuyo espacio de funciones $C^\infty(\mathfrak{M})$ es un álgebra de Poisson con respecto a la multiplicación puntual usual de funciones y una estructura de álgebra de Lie prescrita.

Definición 2.4.10. Una función suave $\varphi : M \to Q$ entre dos variedades de Poisson con corchetes de poisson $\{.,.\}_M$ y $\{.,.\}_Q$, respectivamente, es llamado una ***función de poisson*** si para cualquier $f, g \in C^\infty(Q), \{f \circ \varphi, g \circ \varphi\}_M = \{f, g\}_Q \circ \varphi$.

Si φ preserva al corchete de poisson, entonces $\{f \circ \varphi, g \circ \varphi\} = \{f, g\}$. Similarmente, φ es llamado una **función anti-Poisson** si $-\{f \circ \varphi, g \circ \varphi\} = \{f, g\}$ para todo $f, g \in C^\infty(Q)$. Sobre una variedad de Poisson, la identidad de Leibniz implica que el corchete de Poisson es dado por el campo tensorial contravariante antisimétrico π vía la fórmula

$$\{f, g\} = \pi(df, dg).$$

Ejemplo 2.4.1. Los ejemplos principales de variedades de Poisson $\mathfrak{M}$ que nos interesan son los siguientes:

1. Cualquier variedad suave $\mathfrak{M}$ es una variedad de Poisson cuando es equipado con la estructura del corchete trivial $\{f, g\} = 0$ para todo $f, g \in C^\infty(\mathfrak{M})$. En este caso el rango de $\mathfrak{M}$ es 0 en todo lugar, las hojas simplécticas son precisamente los puntos de $\mathfrak{M}$.

2. Cualquier variedad simpléctica $\mathfrak{M}$ es una variedad de Poisson con respecto a su estructura estándar de Poisson

$$\{f, g\} = X_g.f$$

Más aún, si $\mathfrak{N}$ es una variedad arbitraria con la estructura de corchete Poisson trivial.

Entonces $\mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$ es una variedad de Poisson con hojas simplécticas

$$\{\mathfrak{M} \times \{x\} : x \in \mathfrak{N}\}$$

3. Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie de dimensión finita con dual $\mathfrak{g}^*$. La derivada de una función suave $F : \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^* \to \mathbb{R}$ es una función $DF : \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ cuya composición con el corchete de Lie sobre $\mathfrak{g}$ define una función suave $[DF] : \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}$. El **operador** de **Lie-Poisson** sobre $C^\infty(\mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^*)$ es el operador diferencial $\mathcal{D}$ definido por

$$\mathcal{D}F = \frac{1}{2}\left\langle [DF]_{(x,y)}, x + y \right\rangle$$

El espacio dual $\mathfrak{g}^*$ es entonces una variedad de Poisson cuando está equipado con el **corchete** de **Lie-Poisson**

$$\{f, g\} = \triangle^* \mathcal{D}(f \boxtimes g)$$

donde $\triangle : \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^*$ es la diagonal y $f, g \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$. Más concretamente,

$$\{f, g\}(\mu) = \mu([Df, Dg])$$

donde $\mu \in \mathfrak{g}^*$ y $Df, Dg : \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}^{**} \simeq \mathfrak{g}$ son los diferenciales de f y g.

4. Si $\mathbb{V}$ es espacio vectorial finito dimensional y π es una forma bilineal antisimétrica sobre $\mathbb{V}^*$, entonces,

$$\{f, g\} = \pi(df, dg)$$

define una estructura de álgebra de Poisson sobre $C^\infty(\mathbb{V})$ haciendo a $\mathbb{V}$ una variedad de Poisson.

Una *subvariedad* de *Poisson* Q de una variedad de Poisson es una subvariedad equipado con una estructura de Poisson tal que la función inclusión es una función de Poisson.

Definición 2.4.11. Dado dos variedades de Poisson, M_1 y M_2, definimos el producto $M_1 \times M_2$ como el producto usual de variedades de Poisson equipado con una estructura de $\{.,.\}$ tal que las funciones proyección $\pi_i : M_1 \times M_2 \to M_i$ $i = 1, 2.$ son funciones de Poisson, y

$$\{f \circ \pi_1, g \circ \pi_2\} = 0$$

para todo $f \in C^\infty(M_1)$ y $g \in C^\infty(M_2)$. Esta última condición asegura que $C^\infty(M_1)$ y $C^\infty(M_2)$ pueden ser mapeados vía homomorfismos de Lie álgebras hacia subálgebras conmutativos de $C^\infty(M_1 \times M_2)$.

Definición 2.4.12. El *rango* de una variedad de Poisson sobre un punto $p \in M$ es el rango de la función $F|_p : T_p^*(M) \to T_p(M)$, o equivalentemente, el rango de la estructura cosimplectica sobre p.

Observación Si el rango de una estructura de Poisson de una variedad de Poisson M es igual a la dimensión de la variedad sobre todo punto, entonces M tiene una estructura natural simpléctica. Definir una forma simpléctica Ψ sobre M como

$$\Psi(\xi|_p, \zeta|_p) = w(F^{-1}(\xi|_p), F^{-1}(\zeta|_p))$$

para cualquier $p \in M$, notando que F podría tener un rango completo en cada punto, por lo tanto es una función fibrada invertible. El corchete de Poisson y los campos vectoriales Hamiltonianos concide con aquellos definidos en el sentido usual sobre variedades simplecticas.

Definición 2.4.13. (Series formales de potencias).- Sea X un módulo sobre el anillo R y $\hbar$ un parámetro. Entonces el conjunto $X[[\hbar]]$ de series formales de potencias en el parámetro formal $\hbar$ con coeficientes en X es dado por el producto cartesiano $X[[\hbar]] = \prod_{r=0}^{\infty} X_r$ con $X_r = X$ para todo $r \in \mathbb{N}_0$. En este contexto, todas las secuencias $(x_r)_{r \in \mathbb{N}_0} = (x_0, x_1, \cdots)$ en X son denotados como una serie formal de potencias $x = \sum_{r=0}^{\infty} \hbar^r x_r$

En esta forma obviamente $X[[\hbar]]$ es también un R módulo.

Análogamente, podemos definir la aplicación de series formales de potencias de funciones en si misma. Sea $A = (f_0, f_1, \cdots)$ y $B = (g_0, g_1, \cdots)$ son sucesiones infinitas sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y sea $\mathbb{K}^\infty$ el conjunto de todas las sucesiones infinitas, entonces debido a las operaciones

$$A + B \quad \text{y} \quad kA$$

$\mathbb{K}^\infty$ es una estructura de espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ donde

$$A \times B = C = (f_0 g_0, f_1 g_0 + f_0 g_1, f_2 g_0 + f_1 g_1 + f_0 g_2, \cdots)$$

$$= (c_0, c_1, c_2, \cdots), \quad c_k = \sum_{m+n=k} f_m g_n$$

La operación $\times$ en $\mathbb{K}^\infty$ es conmutativa, asociativa, distributiva, lo que implica que $(\mathbb{K}^\infty, +, \times)$ es una $\mathbb{K}$ álgebra lineal conmutativa con unidad, con elemento neutro la sucesión $1 = (1, 0, 0, \cdots)$.

Las sucesiones

$$x^0 = (1, 0, 0, \cdots), x^1 = (0, 1, 0, 0, \cdots), x^2 = (0, 0, 1, 0, \cdots), \cdots$$

Entonces,

$$(f_0, f_1, f_2, \cdots) = f_0 x^0 + f_1 x^1 + f_2 x^2 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} f_k x^k$$

es la definición de una serie formal de potencias.

Siguiendo prescripciones puramente algebraicas podemos extender anillos, álgebras y otras estructuras algebraicas a series formales de potencias.

Definición 2.4.14. (Producto formal estrella).- Sea $\mathfrak{M}$ una variedad suave y $C^\infty(\mathfrak{M})$ denota el conjunto de funciones suaves complejas. Entonces un producto formal estrella, con parámetro $\hbar$, es un $\mathbb{C}[[\hbar]]$ producto $\star$ bilineal asociativo para $C^\infty(\mathfrak{M})[[\hbar]]$ de la forma

$$a \star b = \sum_{r=0}^{\infty} \hbar^r C_r(a,b) \tag{2.20}$$

Para todo $a, b \in C^\infty(\mathfrak{M})[[\hbar]]$ con funciones $\mathbb{C}$ bilineales

$$C_r : C^\infty(\mathfrak{M}) \times C^\infty(\mathfrak{M}) \longrightarrow C^\infty(\mathfrak{M})$$

tal que

(1.) $C_0(a,b) = a \cdot b$ es el producto en el sentido puntual y

(2.) $1 \star a = a \star 1$ el cual significa que $C_r(1,a) = 0 = C_r(a,1)$ para todo $r \geq 1.$

Dos productos $\star$ y $\tilde{\star}$ sobre $\mathfrak{M}$ son dichos ser equivalentes si existe una serie formal de potencias $S = \mathrm{id}_{C^\infty(\mathfrak{M})} + \sum_{r=1}^{\infty} \hbar^r S_r$ de funciones lineales $S_r : C^\infty(\mathfrak{M}) \longrightarrow C^\infty(\mathfrak{M})$ con

$$S(a \star b) = S_a \tilde{\star} S_b \text{ y } S(1) = 1.$$

Un producto estrella $\star$ es llamado diferencial si los C_r son operadores bidiferenciales. Entonces, la equivalencia de transformaciones S tiene que consistir de operadores diferenciales.

La asociatividad de un producto muestra que la variedad $\mathfrak{M}$ es necesariamente una variedad de Poisson con el corchete de Poisson $\{.,.\}$ definido por

$$C_1(a,b) - C_2(b,a) = i\{a,b\}, \tag{2.21}$$

donde $i \in \mathbb{C}$ es la unidad imaginaria compleja.

La existencia del producto estrella $\star$ sobre variedades simplécticas fue probado independientemente por[34] y por[35]. Más contribuciones fueron dados por Omori, Maeda y

[34] DeWilde, M. and Lecomte, P. *Formal deformations of the Poisson Lie algebra of a symplectic manifold and star-products. Existence, equivalence, derivations*, in M. Hazenwikel and M. Gerstenhaber, eds,. *Deformation Theory of Algebras and Structures and Applications*, Kluwer Acad. Pub., Dordrecht (1988), 897-960.

[35] Fedosov, B., *A simple geometrical construcción of deformation quantization*, J. Diff. Geom. 40 (1994) 213-238.

Yoshioka. Por otro lado, Kontsevich con su famoso teorema de formalidad mostró la existencia del producto estrella para cualquier variedad de Poisson tal que (2.21) se cumple para el corchete de Poisson.

2.5. Formulación de la Hipótesis

2.5.1. Hipótesis General

Los modelos de cuantización algebraica coadyuvan favorablemente en el análisis de los mercados financieros de capitales.

2.5.2. Hipótesis Específicas

1. El tipo de álgebra $\mathfrak{A}$ de los modelos financieros de cuantización algebraica influye en el proceso vectorial estocástico $\mathbb{X}(u,t)$ de los mercados financieros.

2. El homomorfismo Φ de las álgebras $\mathfrak{A}$ y $C^{\infty}(\mathfrak{M}$ de los modelos de cuantización explica efectivamente la variación del riesgo y el rendimiento de las tasas de retornos Ξ y Δ de los mercados financieros.

3. Los espacios fases de configuraciones de los modelos $(\mathcal{M}, \mathfrak{B}, \mathfrak{Q})$ influyen en el análisis de la volatilidad Θ de los mercados financieros.

4. Las operaciones de desplazamiento paralelo e involuciones de los modelos de cuantización algebraica determinan las fibraciones geométricas de los mercados financieros.

5. Las propiedades topológicas de los modelos de cuantización algebraica describen la aleatoriedad de los mercados financieros.

CAPÍTULO III

METODOLOGÍA

3.1. Diseño Metodológico

3.1.1. Tipo de Investigación

El presente estudio por la forma como se ha planteado, reúne las condiciones metodológicas para ser considerado como una investigación cualitativa, experimental y exploratoria en razón que busca idenficar "leyes universales y causales[36]" intencionalmente "acotando" la información teórica de los modelos de cuántización algebraica en los mercados financieros para probar su validez de estos modelos construidos y formalizados en el marco teórico de esta tesis.

Además, la investigación considera conceptos y metodologías científicas referentes a

[36] [Bergman 2008].

tres disciplinas: la matemática, la física cuántica y las ciencias financieras, tales como concepos de álgebras abstractas, espacios topológicos fibrados, cuantización algebraica por deformación, series de potencias formales, mercados financieros de capitales, procesos estocásticos, tasas de interés, geometría de los mercados financieros, simetrías de comportamiento dinámico de la volatilidad de los mercados financieros, etc. que le dan al estudio un carácter multidisciplinario y porque el estudio se concretiza al considerar como insumo a una familia numerosa de funciones continuas y una familia de variables aleatorias que interactúan dinámicamente en distintas direcciones en el espacio-tiempo y están sometidas a leyes de la lógica deductiva para la explicación de los efectos de la variable independiente sobre la variable dependiente del título de esta tesis.

Por lo tanto, es importante considerar el factor índice de los mercados financieros en el tiempo y las disciplinas a utilizar para la construcción de los modelos de cuantización para el estudio y análisis de la relación entre causa - efecto que existe entre los modelos de cuantización y su influencia sobre los mercados financieros de capitales.

La etapa aplicativa de la investigación será tanto *retrospectivo*, porque considera el registro de datos históricos de los índices de variación de los mercados afiliados en las bolsas de valores que ocurrieron en el pasado. El estudio es también una metodología de tipo *prospectivo* por que tiene en consideración los hechos que se registran en el presente para una visión proyectiva hacia el futuro.

Esta investigación es también es de tipo descriptiva y explicativa porque describe y explica la conducta de los mercados financieros al analizar el cambio dinámico de sus activos en distintos periodos de tiempo, específicamente analíza su volatilidad, vía los modelos de cuantización algebraica.

3.1.2. Nivel de Investigación

En cuanto al nivel de investigación es de primer nivel, investigación básica, por cuanto tiene un carácter original, sobre un tema que concierne a la construcción de modelos de cuantización algebraica de mercados financieros que responde a cuestiones propias de la ciencias financieras, del sistema financiero globalizado, y por tanto tiene validez universal, en particular, será de utilidad en el Perú.

La investigación permitirá determinar las causas internas y externas de la problemática y a partir de ellos proponer una herramienta financiera metodológica que permita analizar una variedad de interacciones entre los conceptos involucrados en la formalización de los modelos. Es decir, nos va permitir mostrar el grado de influencia que existe de los modelos de cuantización algebraica para explicar volatilidad de los mercados financieros, enfatizando inicialmente su aspecto exploratorio y luego descriptivo, explicativo y correlacional con el propósito de dar conclusiones generales, basados en su construcción y los resultados obtenidos de la evaluación del modelo.

3.1.3. Método de Investigación

En la presente investigación utilizamos el método inductivo y deductivo, al generalizar y particularizar hechos y resultados, y el método estadístico entre otros que conforme se desarrolló la investigación se dieron indistintamente.

1. **Método inductivo.-** Permite construir y aplicar inductivamente el modelo de cuántización algebraica al extender su generalización involucrando mayor número de activos financieros, dimensión del proceso estocástico involucrando mayor número de variables aleatorias, generalizando para un número arbitrario de activos y la

dimensión de las variedades de poisson del espacio fibrado.

2. **Método deductivo.-** Permitirá deducir la conducta de los mercados financieros, a partir de un modelo general de mercados financieros, con el fin de medir y administrar su volatilidad, para lo cual se partirá de lo general para llegar a aplicaciones particulares. Esto es, usamos principios generales (teoremas, colarios etc.) y otras leyes matemáticas generales para explicar una actividad particular en el sistema de los mercados financieros vía los modelos de cuantización algebraica.

3. **Método estadístico.-** Mediante este método, se seleccionó la población, el tamaño de muestras para verificar la eficacia y confiabilidad de los modelos de cuantización algebraica de los mercados financieros y su relación comparativa con los modelos tradicionales ya existentes. Además, aquí se dan las contrastaciones de hipótesis estadísticas, planteadas en la sección (2.6), como verificación de su verdad o falsedad y concretizar los objetivos.

4. **Método histórico.-** Mediante este método se analíza los datos históricos de los índices de variación de precios de los activos financieros registrados en las principales bolsas de valores internacionales, incluyendo la BV de Lima, y los hechos desde años anteriores.

De los materiales

Los materiales que se emplearon en el planeamiento, la ejecución, presentación del proyecto de tesis y la presentación del informe de tesis son de ejecución, de impresión, digitalización, de impresión para su revisión y publicación.

3.1.4. Diseño de la Investigación

El diseño de la investigación es de tipo no experimental, transaccional o transversal de orden multidisciplinario.

En la investigación para obtener y enunciar las conclusiones se usan:

1.- Los resultados de la construcción y evaluación de los modelos de cuantización algebraica de los mercados financieros de capitales y sus leyes internas de desplazamiento paralelo e involución con significado financiero.

2.- La ejecución de los objetivos que dan respuesta a las hipótesis planteadas en la investigación (que podría ser una prueba de Normalidad, pruebas t, χ cuadrada u otras) formulando el modelo estadístico apropiado durante la verificación aplicativa de los modelos de cuantización algebraica, con datos captados en el tiempo, y analizados para distintos mercados financieros (individuales o en conjunto) mediante el análisis de sus activos financieros.

Si bien el diseño de investigación es aplicado propiamente en la investigación no experimental de campo cuando es utilizado en las bolsas de valores son demostrados en la teoría y en la práctica. También adaptamos la metodología de construcción del modelo y su aplicación de tal forma que el diseño de investigación que se utiliza reune las características de una investigación por objetivos tal como se muestra en el siguiente esquema, que representa el diseño de implicaciones de los problemas, objetivos y conclusiones.

$$
\mathcal{P}G \Rightarrow \mathcal{O}G \Rightarrow \begin{cases} \mathcal{P}E_1 \longrightarrow \mathcal{O}E_1 \longrightarrow \mathcal{C}E_1, \\ \mathcal{P}E_2 \longrightarrow \mathcal{O}E_2 \longrightarrow \mathcal{C}E_2, \\ \mathcal{P}E_3 \longrightarrow \mathcal{O}E_3 \longrightarrow \mathcal{C}E_3, \\ \mathcal{P}E_4 \longrightarrow \mathcal{O}E_4 \longrightarrow \mathcal{C}E_4, \\ \mathcal{P}E_5 \longrightarrow \mathcal{O}E_5 \longrightarrow \mathcal{C}E_5, \end{cases} \Longrightarrow \mathcal{C}F = \mathcal{H}G
$$

Donde:

$\mathcal{P}G =$ Problema General

$\mathcal{P}E_i = i-$ésimo problema específico, $i = 1, 2, 3, 4, 5$

$\mathcal{O}G =$ Objetivo General

$\mathcal{O}E_i = i-$ésimo objetivo específico, $i = 1, 2, 3, 4, 5$

$\mathcal{C}F =$ Conclusión final.

$\mathcal{C}E_i = i-$ésima conclusión específica, $i = 1, 2, 3, 4, 5$

$\mathcal{H}G =$ Hipótesis General.

Se selecionó 10 mercados financieros internacionales (10 bolsas de valores) y dos muestras de tamaño n_1 y n_2 de empresas[37] categorizadas como empresas medianas y empresas grandes, respectivamente, de una población finita de N empresas, en la cual:

$$
n = O_X \mathcal{R} \ O_Y
$$

Donde: $n =$ tamaño de la muestra.

$O =$ Observación.

$X =$ Modelos de cuantización algebraica (Var independiente).

$Y =$ Mercados financieros de capitales (Var. dependiente).

$\mathcal{R} =$ Relación de variables.

[37] También podriamos seleccionar dos muestras o más de activos financieros de cada mercado categorizada y realizar la aplicación del modelo $(\mathcal{M}, \mathfrak{B}, \mathfrak{Q})$ para el análisis de la volatilidad de sus activos.

$Y = f(X)$ es la relación de influencia de los modelos de cuantización algebraica (X) sobre los mercados financieros de capitales Y (la variable respuesta Y en función de la variable predictora X).

3.2. Población y Muestra

3.2.1. Población

Para la aplicación del modelo de cuantización algebraica a los mercados financieros se consideró la población objeto de estudio conformada por el conjunto $N = 1561$ empresas registradas en las distintas bolsas de valores internacionales[38] (incluyendo la BV de Lima-Perú), concretamente elegimos 10 bolsas de valores internacionales y clasificamos a las empresas registrados en ellas como empresas medianas y empresas grandes, como se muestra en el Cuadro 3.1.

Luego a partir de esta población mediante el muestreo aleatorio simple se seleccionó

Tipo de Empresa	Población	Proporción
Mediana	983	$P = 0{,}63$
Grande	578	$Q = 0{,}37$
TOTAL	1561	1.00

Cuadro 3.1: Clasificación de empresas seleccionadas de las BVs. Elabor. propia.

y clasificó a las empresas en función a sus activos (empresas medianas y empresas

[38] Bloomberg, Dow Jones, NASDAQ, etc. son organizaciones internacionales de base de datos que captan y mantienen información financiera de indices de actividades financieras de empresas, mercados financieros, y corporaciones internacionales de donde se obtuvieron los datos requeridos.

grandes) registrados en las bolsas de valores[39]. Estos mercados y empresas fueron clasificadas de acuerdo al objetivo de la investigación. El número de empresas seleccionadas de cada bolsa de valores (10 bolsas de valores más importantes eh el mundo) se muestran en el Cuadro 3.2.

No	BV	PAÍS	N^o de Empresas	Valor(Bill)	N$^o Emps$
1	NYS	Euronex (US)	80(50M,30G)	16.509	2342
2	NASDAQ	QMX (US)	120(70M, 50G)	5.459	2579
3	TOKYO	Japan Exchange Gp	98(60M, 38G)	4.218	3411
4	SE	London SE Gp	40(25M, 15G)	3.890	2741
5	HKE	Hong Kong Ex	78(48M, 30G)	2.773	1575
6	SE	Shanghai SE	80(110M, 70G)	2.302	954
7	TMX	Canada Toron Gp	165(100M, 65G)	2.2002	3944
8	DB̈	Deutsche B̈orse Gp	200(130M, 70G)	1.624	731
9	ASX	Australian Sec Exch	320(200M, 120G)	1.275	2048
10	SZSE	Shenzhen SE	280(190M, 90G)	1.263	1537
TOTAL			1561(983M, 578G)		21862

Cuadro 3.2: Fuente: Bloomberg, Dow Jones, NASDAQ, CONASEV y elaboración propia.

[39] **Podríamos también haber clasificado a los mercados financieros como: Mercado Primario**: el activo es emitido por vez primera y cambia de manos entre el emisor y el comprador, por ejemplo, oferta Pública de Venta en el caso de renta variable, emisión de bonos en el caso de renta fija. **Mercado Secundario:** los activos se intercambian entre distintos compradores para dotar de liquidez a dichos títulos y para la fijación de precios.

3.2.2. Muestra

En la determinación del tamaño óptimo de la muestra se utilizó la fórmula del muestreo aleatorio simple dado que se conoce las proporciones de las subpoblaciones $P = \frac{N_1}{N} = \frac{983}{1561} \approx 0{,}63$ y $Q = \frac{N_2}{N} = \frac{578}{1561} \approx 0{,}37$ de empresas medianos y grandes, respectivamente. El cálculo del tamaño de la muestra es mediante la fórmula:

$$n = \frac{Z^2 P \cdot Q \cdot N}{\alpha^2(N-1) + Z^2 P \cdot Q} \tag{3.22}$$

donde Z es el valor de la abscisa de la curva normal, valor crítico, para un nivel[40] de confianza $1-\alpha$ y un nivel de significancia α

P y Q son proporciones de empresas medianas y grandes, respectivamente, conforme se muestra en el Cuadro 3.1.

Remplazando los datos en (3.22) se obtiene la muestra de tamaño 292 empresas.

$$n = \frac{1{,}96^2(0{,}63)(0{,}37)(1561)}{0{,}05^2(1561-1) + 1{,}96^2(0{,}63)(0{,}37)} \approx 292 \text{ empresas (medianas y grandes)}$$

Ahora, al considerar la población $N = 1561$ en su forma estratificada, en empresas medianas y grandes, usando la fórmula de proporcionalidad estratificada para la obtención de muestras del muestreo aleatorio estratificado:

$$n_i = \frac{N_i}{N} \times n \quad \text{para} \quad i = 1, 2. \tag{3.23}$$

se obtienen los siguientes tamaños de muestras:

Muestra óptima para empresas medianas

$$n_1 = \frac{N_1}{N} \times n = 0{,}63 \times 292 \approx 184 \text{ empresas medianas}$$

[40] Los niveles de confianza clásicos son $95\,\%$, $98\,\%$, y $99\,\%$ con valores críticos de la distribución normal de 1.96, 2.33, y 2.58, respectivamente.

Muestra óptima para empresas grandes

$$n_2 = \frac{N_2}{N} \times n = 0{,}37 \times 292 \approx 108 \text{ empresas grandes}$$

Note que $n_1 + n_2 = n = 292$ empresas coincide con el resultado obtenido con la fórmula (3.22), como se muestra arriba.

Una vez determinado el tamaño de la muestra inicial de $n = 292$ empresas, adjuntos a las bolsas de valores, el siguiente paso es determinar la muestra ajustada. Para ajustar o corregir la muestra n, se utiliza la siguiente fórmula

$$n_{corr} = \frac{n}{1 + \frac{n-1}{N}} \tag{3.24}$$

remplazando los datos disponibles, resultan respectivamente.

$$n_{corr} = \frac{292}{1 + \frac{291}{1561}} \approx 246$$

$$n_{1corr} = \frac{184}{1 + \frac{183}{983}} \approx 155$$

$$n_{2corr} = \frac{108}{1 + \frac{107}{578}} \approx 91$$

Por lo tanto, la muestra óptima más real ajustada es $n_{1corr} + n_{2corr} \approx 246$ empresas, tal como se muestra en el Cuadro 3.3.

Tipo de Empresa	Muestra	Proporción
Mediana	155	$\hat{P} = 0{,}63$
Grande	91	$\hat{Q} = 0{,}37$
TOTAL	246	1.00

Cuadro 3.3: Clasificación de empresas seleccionadas en el marco muestral corregido.

3.3. Operacionalización de Variables

3.3.1. Variable Independiente

$X :=$ MODELOS DE CUANTIZACIÓN ALGEBRAICA

Indicadores:

$X_1 :=$ El álgebra $\mathfrak{A}$ del modelo de cuantización algebraica.

$X_2 :=$ El homomorfismo Φ entre las álgebras $\mathfrak{A}$ y $C^\infty(\mathfrak{M})$.

$X_3 :=$ Los espacios fases $(\mathfrak{M}, w)$ y $(\mathfrak{M}', w')$de observables de los modelos de cuantización.

$X_4 :=$ Las operaciones de desplazamiento paralelo e involuciones de los modelos de cuantización.

$X_5 :=$ Las propiedades topológicas de los modelos de cuantización algebraica.

3.3.2. Variable Dependiente

$Y :=$ MERCADOS FINANCIEROS DE CAPITALES

Indicadores

$Y_1 :=$ El proceso vectorial estocástico $\mathbb{X}(u, t)$ de los mercados financieros.

$Y_2 :=$ Las tasas de riesgo Ξ y rendimiento Δ de los mercados financieros de capitales.

$Y_3 :=$ La volatilidad Θ de los mercados financieros.

$Y_4 :=$ La estructura geométrica fibrada de los mercados financieros de capitales.

$Y_5 :=$ Los modelos aleatorios de los mercados financieros de capitales sobre $\mathbb{E} = (\Omega, F, P)$.

3.4. Técnicas de Recolección de Datos

3.4.1. Descripción de los Instrumentos

La principal técnica utilizada en este estudio es la recolección electrónica, por muestreo, de datos de medidas históricas de índices de variación de precios de activos financieros y actividades de intercambio en los mercados financieros de la base de datos Bloomberg, Dow jons, NASDAQ y otras BVs globalizadas, y el www.sbs.gob.pe; ubicando a las empresas que serán seleccionadas de acuerdo a lo diseñado en la sección 3.2.

Otras técnicas de recolección de información, como la encuesta y la entrevista son alternativas importantes que podrían usarse a nivel nacional o internacional electrónicamente, pero que, en este caso, no es apropiado debido a que el tema de investigación es desconocido para los encuestados y entrevistados.

3.4.2. Procedimientos de comprobación de la validez y confiabilidad de los instrumentos

Los instrumentos elaborados para la recolección de datos se basan en técnicas generalizadas de muestreo estadístico de aceptación mundial y son entendibles y utilizados por todos los investigadores de las distintas disciplinas científicas como son los consultados, los Presidentes, Administradores y Gerentes que requieren trabajar con muestras aleatorias en lugar de usar todo el universo de datos.

Los datos obtenidos son confiables porque están a la luz de todos los expertos en finanzas y de cualquier investigador que requiere datos a manera de juicio de expertos. Asimismo, se comprueba su confiabilidad de los datos al verificar que las fuentes de captación, almacenamiento y publicaciones son entidades nacionales e internacionales de seriedad comprobada cuyos resultados son divulgados a nivel internacional para comprobar la calidad de la información con el fin de obtener resultados óptimos y acordes a la realidad financiera actual y mundial.

3.5. Técnicas Para el Procesamiento de la Información

Se tabuló y procesó la información cuantitativa de los índices de variación de los mercados financieros remplazando en el modelo de cuantización algebraica y haciendo uso del programa computacional $SPSS$ (Statistical Package for Social Sciences) y en ciertos casos el programa matemático MAPLE para graficar y evaluar el modelo. La obtención e interpretación de resultados al evaluar los modelos de cuantización algebraica, como: medidas de su volatilidad, medidas de las simetrías de desplazamiento paralelo de los activos, tendencias, correlaciones de activos, comparación de resultados en el modelo clásico y en el modelo cuántico, descripción y predicciones de la conducta de los mercados financieros etc.

3.6. Aspectos Éticos

El desarrollo de la investigación a nivel de los mercados financieros globalizados, se llevó a cabo respetando aspectos éticos y morales en su desarrollo; así como también se demostó que los datos recopilados de fuentes financieras fueron proporcionadas por personas o fuentes con responsabilidad y ética de cooperación por el beneficio del desarrollo de la ciencias financieras y la contabilidad y los datos históricos provienen de fuentes reales con alto nivel de confianza.

CAPÍTULO IV

RESULTADOS

4.1. Resultados de Fuentes Documentales

Recordemos que un mercado financiero de capitales (MFC) es un tipo de mercado financiero en el que se realiza la compra y venta de títulos (principalmente los “bonos” y las “acciones”) representativos de los activos financieros de las empresas cotizadas en bolsa (como se muestra en el cuadro 3.2 sección 3.2.1). Se puede decir que un MFC constituye un mecanismo de ahorro e inversión para los inversionistas y financiamiento para los emisores.

Un ejemplo típico de mercado financiero es la **bolsa de valores**.

Dentro del mercado de capitales intervienen diversas instituciones del sistema financiero que participan regulando y complementando las operaciones que se llevan a cabo dentro del mercado. Una de las entidades importantes son las bolsas de valores.

La Bolsa de Valores: Su principal función es brindar una estructura operativa a las operaciones financieras, registrando y supervisando los movimientos efectuados por oferentes y demandantes de recursos. Además, da fé de cotizaciones e informa al inversionista de la situación financiera y económica de la empresa y del comportamiento de sus instrumentos financieros. Las bolsas de valores más importantes del planeta estan el el cuadro 3.2. La Bolsa de Valores de Nueva York NYSE Euronext (US) es la que tie-

Figura 4.14: Los datos bursátiles se obtuvieron de la página **www.world-exchanges.org**.

ne un mayor valor en el mercado, $ 16.509 Billones de dólares. El número de empresas que cotizan en Bolsa; número de empresas y organizaciones que se encuentran registradas y que cotizan valores en las respectivas Bolsas de Valores es 2342. La Bolsa de Valores de TMX - Group Toronto es la que tiene registrado más empresas en su lista: 3944 organizaciones.

Figura 4.15: Los datos bursátiles se obtuvieron de la página **www.world-exchanges.org.**

En seguida mencionamos y comentamos dos de las principales Bolsas de Valores del Mundo.

NASDAQ tiene un valor de mercado de $ 5.459 Billones de dólares registrados a Julio

Figura 4.16: La Bolsa **NASDAQ OMX** (National Association of Securities Dealers Automated Quotation) con sede en la ciudad de New York.

del 2013, cuenta con 2579 empresas listadas que cotizan en esta Bolsa.

Es la bolsa de valores electrónica y automatizada más grande de los Estados Unidos.

Lista a más de 7.000 acciones de pequeña y mediana capitalización.

Se caracteriza por listar empresas de alta tecnología en electrónica, informática, telecomunicaciones, biotecnología, etc. Sus índices más representativos son el Nasdaq 100 y el Nasdaq Composite.

Figura 4.17: La Bolsa **NYSE** Euronext (US) con sede en la ciudad de New York.

La Bolsa NYSE tiene su oficina principal en Nueva York. Esta bolsa tiene un valor de mercado de $ 16.506 Billones de dólares registrados a Julio del 2013, cuenta con 2342 empresas listadas que cotizan en esta Bolsa.

Es la más bolsa más grande de valores en el mundo tanto por capitalización bursátil como por el valor del comercio. Dentro de esta Bolsa cotizan las principales empresas y organizaciones de todo el mundo. Es operado por NYSE Euronext, el “holding” creado el 2007 por la combinación de NYSE Group Inc. y Euronext NV. NYSE ofrece una amplia gama de productos y servicios financieros en acciones, futuros, opciones, productos cotizados (ETP), bonos, datos de mercado y soluciones de tecnología comercial.

4.2. Resultados de Evaluación del Modelo

Recurrimos al modelo construido en la sección 2.3 y su definición 2.3.1 y a todos los conceptos necesarios y notaciones ya establecidos, en el desarrollo de esta tesis, para concretizar su aplicación y utilidad de los modelos financieros de cuantización algebraica y su influencia en el análisis de los mercados financieros de capitales.

Iniciamos eligiendo un mercado financiero arbitrario, por instancia sin pérdida de generalidad, supongamos que elegimos al mercado financiero NASDAQ que tiene afiliados N activos financieros dinámicos $a_1, a_2, \cdots, a_N$ en su cartera de mercados, donde por lo menos dos activos son intercambiables.

Estamos interesados en medir la variación de una o más caraterísticas de sus activos (por ejemplo, la variación del precio, de su rendimiento[41] , tasa de rendimiento, volatilidad etc.) de uno o más activos. Además supongamos que el comportamiento de sus activos están descritos por funciones diferenciables que se desplazan sobre una variedad de Poisson $\mathbb{R}^D$ de dimensión D.

Sean $f_{1D}, f_{2D}, \cdots, f_{ND}$ estas funciones diferenciables en el espacio $C^\infty(\mathbb{R}^D)$, como ya sabemos forman un álgebra de Poisson $\left\langle C^\infty(\mathbb{R}^D), \{.,.\}\right\rangle$ (definición 2.4.8) que describen la trayectoria de los cambios (desplazamiento paralelo) de cada activo a_i, respectivamente, para $i = 1, 2, 3, \cdots, N$.

Sean las coordenadas $p = (p_1, p_2, \cdots, p_D)$ y $q = (q_1, q_2, \cdots, q_D)$ tal que $f(p, q) \in \mathbb{R}^{2D}$.

Para mayor claridad y entendimiento, restrinjamos este ejemplo a un caso más simple de dos activos financieros arbitrarios A y B seleccionados del conjunto de activos $\{a_1, a_2, \cdots, a_N\}$ y sean sus correspondientes funciones $f_{12} = f(p, q)$ y $f_{22} = g(p, q)$, de la bolsa de valores NASDAQ en dimensión $D = 2$ y queremos medir, por ejemplo, sus rendimientos en función de su volatilidad y su tendencia en un horizonte de tiempo $[0, T]$ igual a un año (12 meses).

Sean $f(p, q) = psin(q)\sqrt{T}$ y $g(p, q) = qsin(p)\sqrt{T}$ en $C^\infty(\mathbb{R}^4)$ funciones del rendimiento de cada activo, respectivamente, donde p y q denotan sus volatilidades generalizadas[42] que dependen del tiempo $t \in [0, T]$ y $sen(p)$ y $sen(q)$ describen las tendencias de los

[41] Recordemos que el **rendimiento** de un activo es la ganacia o pérdida total que experimenta el propietario de una inversión en un periodo de tiempo específico.

[42] Recurriendo a la fórmula 2.17, podríamos obtener volatilidades anualizada en un periodo de tiempo especificado.

activos A y B, respectivamente.

Como la volatilidad Θ mide, por ejemplo, la variación (el riesgo) de los rendimientos de la inversión de los activos A y B en un horizonte $[0, T] \times [0, T]$, por la definición 2.4.1, ecuación 2.16, tenemos que

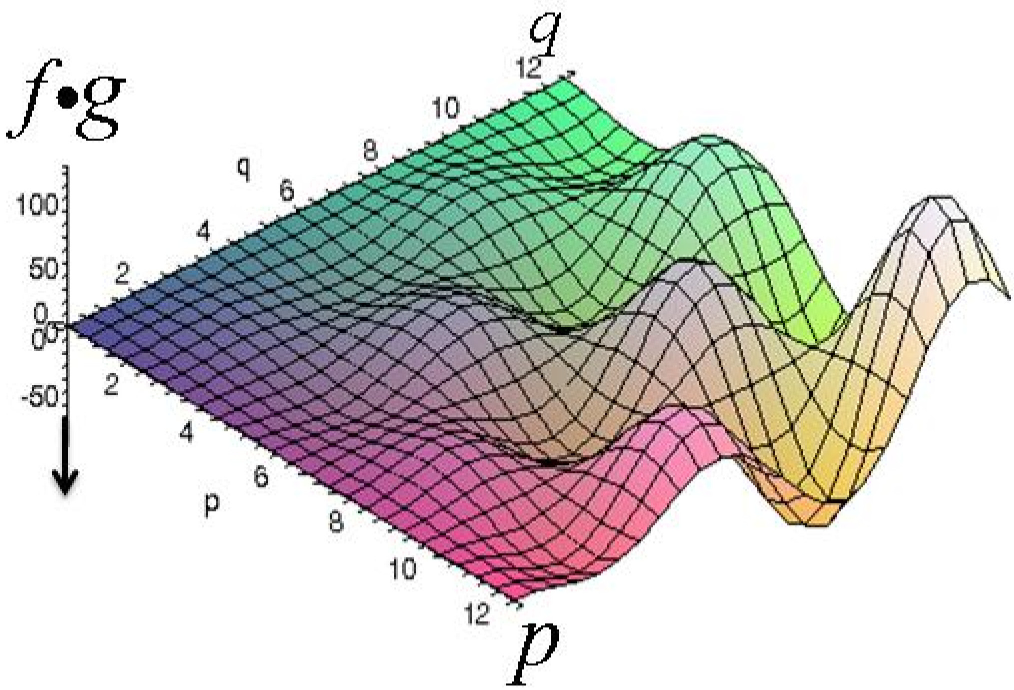
$$(f \cdot g)(p, q) = psen(q)qsen(p)$$

representa el rendimiento conjunto[43] de los activos A y B, en el espacio de la mecánica clásica, cuya fluctuación del rendimiento sobre el cuadrado $[0, T] \times [0, T]$ se muestra en la siguiente superficie de rendimiento, figura 4.18. Notamos que el rendimiento conjunto varia en el horizonte (el cuadrado) $[0, T] \times [0, T]$ que al evaluar en los vértices $(0,0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)$ y en otros valores de $0 < p < 1$ y $0 < q < 1$ resulta el mínimo rendimiento (mínima volatilidad) en $(0, 0)$, aún no se ejecuta la inversión, $(f \cdot g)(0, 0) = 0$ (no hay riesgo), el horizonte de inversión o negociación aún no inicia. Similarmente, al evaluar en el vértice (1,1) resulta $(f \cdot g)(1, 1) = 0{,}7080734183$ que representa el máximo rendimiento, a mayor horizonte de inversión (o crédito) mayor rendimiento esperado (mayor interés a pagarse). Notemos que en este caso la dirección (el signo) del rendimiento está dado por una función trigonométrica cuyo sistema angular está dado en radianes, pero su equivalente en el sistema sexagesimal es $(f \cdot g)(0, 0) = 0$ y $(f \cdot g)(1, 1) = 0{,}0003046$ el mínimo y el máximo rendimiento, respectivamente.

Estos resultados son ratificados por lo que muestra la Figura 4.18. en el origen (0,0) no hay rendimiento ni volatilidad, no hay actividad de financiamiento, pero conforme nos alejamos del origen el rendimiento esperado aumenta (o podría decirse a mayor horizonte de negociación mayor volatilidad) hasta un máximo de $(f \cdot g)(1, 1) = 0{,}7080734183$.

[43] El propósito de definir el rendimiento conjunto como un producto, y no como suma ponderada, es proteger la originalidad del álgebra de Pisson definido con el producto ordinario de funciones continuas y porque $(f \cdot g)(p, q) = psen(q).qsen(p)$ será el primer término de la expansión de la serie de deformación en el ambiente cuántico.

Figura 4.18: Superficie del rendimiento conjunto $(f \cdot g)(p,q) = psen(q).qsen(p)$ de dos activos.



Fuente: Elaboración propia.

Note que estos cálculos son independientes del tipo de moneda y unidades de medición debido a la existencia de simetrías de medición.

Concluimos de este parrafo de análisis que si incluimos un coeficiente en cada función del activo A y B que represente la fracción del monto total a invertir en una cartera del mercado, entonces el monto total de rendimiento esperado será la suma ponderada de los rendimientos de cada activo y fácilmente podríamos usar la $Var(f+g)$ y el coeficiente β etc. para medir la volatilidad de esta cartera, tal como proclama el modelo CAPM, aquí tomamos otro rumbo de análisis.

Continuamos la aplicación y el análisis de este ejemplo ahora a lo que realmente nos interesa. El rendimiento de los activos A y B en el espacio de configuraciones cuántico, haciendo el uso de la definición del modelo (específicamente la definición 2.3.1, parte 7), el caso especial del modelo de cuantización algebraica se tiene que para las funciones $f(p,q) = psen(q)$ y $g(p,q) = qsen(p)$ en $C^{\infty}(\mathbb{R}^4)$ que describen el rendimiento de dichos activos y que mantienen sus mismas características y contando una dimensión para el tiempo t del periodo $[0,T]$ de la actividad financiera ubicados en el álgebra conmutativa de Poisson, procedemos a deformar el álgebra de Poisson mediante el producto $\star_\hbar$ no conmutativo y obtener una familia de álgebras no conmutativas que dependen del parámetro $\hbar$ tal que $f \star_\hbar g$ está en el espacio de las series de potencias formales $C^{\infty}(\mathbb{R}^4)[[\hbar]]$. Hablando concretamente, usamos:

$$|f \star_\hbar g| = \left| f \cdot g + 2\hbar(\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial g}{\partial q} - \frac{\partial g}{\partial p}\frac{\partial f}{\partial q}) + O(\hbar^2) \right| \leq R$$

y obtenemos

$$|f \star_\hbar g| = \left| psen(q)qsen(p) + 2\hbar\,(sen(q)sen(p) - pqcos(p)cos(q)) + O(\hbar^2) \right| \leq R$$

Lo intrigante en este instante es que podemos hacer variar y controlar al modelo mediante el parámetro $\hbar$ y el radio R. Esto nos indica que para cada pareja de activos intercambiables descritos por sus respectivas funciones continuas podemos obtener una familia de modelos haciendo variar $\hbar$ y R. Es decir, estamos frente a una multitud de familias de modelos que forman clases de equivalencia y esto es precisamente el resultado de la deformación del álgebra original de Poisson con el que iniciamos.

En particular, como $\hbar$ es un número real y si hacemos que $\hbar \longrightarrow 0$ en la definición del modelo obtenemos el caso que acabamos de analizar arriba. Es decir, el análisis de los activos que se hace en el espacio clásico, o lo que ocurre en el espacio clásico, es un caso particular de lo que ocurre en el espacio cuántico.

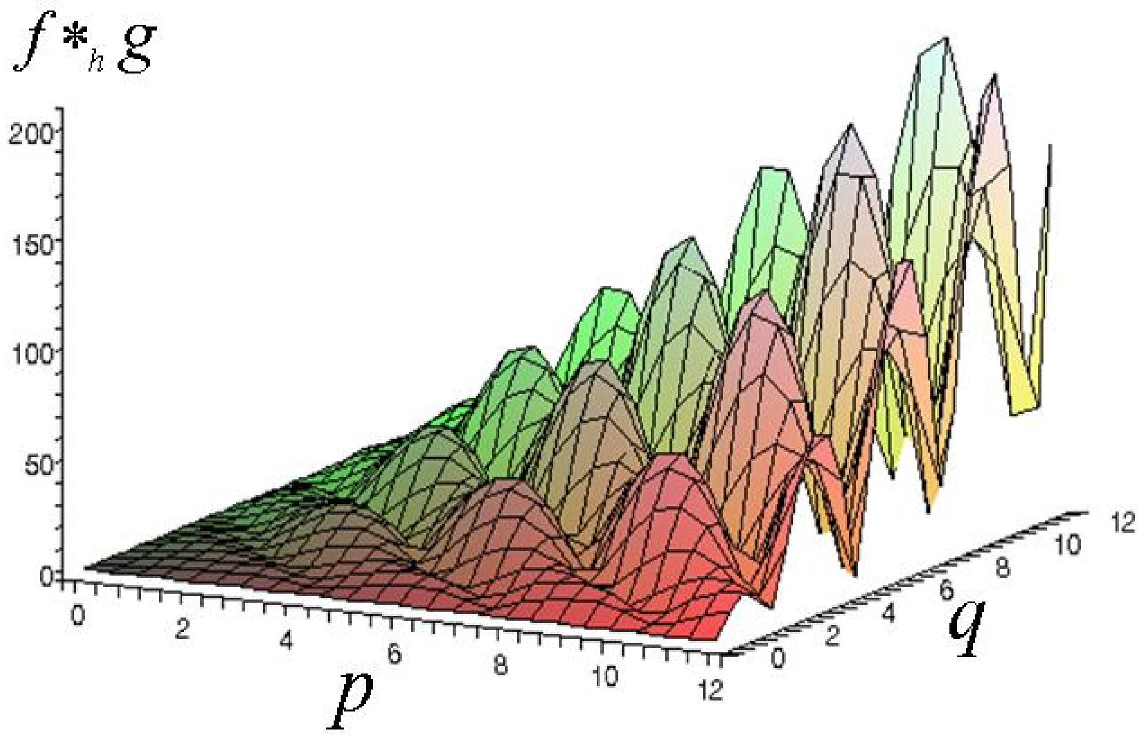
Por otro lado, el rol del parámetro R es que le ofrece al inversionista la oportunidad de ser estricto o parsimonioso en el control de la volatilidad de sus activos. Siempre se prefiere que la volatilidad de un activo sea pequeña. Esto se logrará haciendo que $R < 1$ y que los cambios de precios u otra característica volátil de los activos financieros varíen en un radio pequeño (el cinturón financiero está ajustado). Si la fluctuación de la función del activo sale fuera del radio significará “alerta financiera” para los administradores de los activos.

Por ejemplo, haciendo $\hbar = 1/2$ y $R = 1$ cuando $O(\hbar^2) \longrightarrow 0$ en el ejemplo seguido arriba y simplificando resulta

$$\left| f \star_{\frac{1}{2}} g \right| = |pqsen(p)sen(q) + sen(q)sen(p) - pqcos(p)cos(q)| \leq 1$$

Similar al anterior evaluamos $(f \star_{\frac{1}{2}} g)(p, q)$ en el horizonte del cuadrado $[0, T] \times [0, T]$. En particular evaluamos en los $(0{,}0), (0, 1), (1, 0)$ y $(1, 1)$ y obtenemos el mínimo rendimiento, o la mínima volatilidad, en $(0, 0)$. Es decir, $(f \star_{\frac{1}{2}} g)(0, 0) = 0$ significa que aún no se ejecuta la inversión, $(f \star_{\frac{1}{2}} g)(0, 0) = 0$ (no hay riesgo), el horizonte de negociación aún no inicia, coincide con lo concluido en el espacio de la mecánica clásica. Ahora evaluamos el modelo cuando $\hbar = 1/2$ en el vértice (1,1) y nuevamente resulta la máxima volatilidad, a mayor horizonte mayor volatilidad.

Figura 4.19: Superficie del rendimiento conjunto $(f \star_\hbar g)(p,q)$ de dos activos en un espacio



Fuente: Elaboración propia.

(p,q)	$(f \star_{\frac{1}{2}} g)(p,q) = pqsen(p)sen(q) + sen(q)sen(p) - pqcos(p)cos(q)$
(0,0)	0
(0,1)	0
(1,0)	0
(0.5,0.5)	0.05746221174
(0.6,0.6)	0.1147756042
(0.7,0.7)	0.2033580499
(0.8,0.8)	0.3293438472
(0.9,0.9)	0.4970168483
(1,1)	sen(1)$^2 = 0{,}7080734183$

Estos resultados también se observan en la superficie de rendimiento de los activos A y B, Figura 4.19. Concluimos que los resultados de los rendimientos de los activos en ambos espacios coinciden cuando el parámetro de deformación $\hbar = \frac{1}{2}$ y en general, es cierto para todo $\hbar$ real.

Remarcaciones:

1.- Si evaluamos este caso en cualquier otro punto (p, q) del cuadrado con $0 < p, q < 1$, llamado horizonte de negociación, observamos que el rendimiento conjunto (o podría ser la volatilidad conjunta $\Theta(p, q)$) está entre el mínimo y el máximo obtenido arriba.

2.- Una vez más, Si en el resultado

$$|f \star_\hbar g| = |pqsen(p)sen(q) + 2\hbar\,(sen(q)sen(p) - pqcos(p)cos(q))| \leq R$$

hacemos variar el parámetro de la deformación $\hbar$ sobre los reales positivos lograremos una familia infinita de álgebras deformadas, entonces podemos realizar una clasificación de activos financieros de acuerdo a una relación de equivalencia de sus álgebras y simetrias. En particular cuando $\hbar \longrightarrow 0$ retornamos al álgebra clásico con el cual iniciamos y es considerado la familia trivial de esta clase de equivalencia.

4.3. Contrastación de Hipótesis

La hipótesis general y las hipótesis específicas fueron declaradas afirmativas (verdaderas) al concluir las demostraciones de los objetivos de la investigación de manera analítica y general en el teorema 2.3.1 de la construcción del modelo en la sección 2.3. Además, la contrastación de las hipótesis están sustentadas por la aplicación del modelo en casos concretos. Por lo tanto, no se requieren contrastaciones estadísticas en esta investigación desde que no se realizaron encuestas ni entrevistas.

CAPÍTULO V

DISCUSIÓN, CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

5.1. Discusión

El modelamiento matemático de los cambios dinámicos del precio de los activos en los mercados financieros es un problema muy complejo que se ha intentado resolver desde que se inventó el concepto de "negociar". Algunos autores sostienen que la complejidad de este problema es debido a que no se sabe el verdadero precio de un activo hasta el instante que ocurre la venta. Es decir, no podemos saber simultáneamente el precio y el dueño del activo antes que ocurra la negociación, pero si sabemos que el precio podrá sufrir un cambio.

Frente a esta situación el ser humano con su esfuerzo y su ingenio trata de resolver sus problemas más gigantescos y complejos saliendo del medio donde se encuentra y lleva sus problemas a otro ambiente para investigar y encontrar soluciones para luego retornar con resultados a su ambiente inicial. Esta es la acción que hemos realizado en esta investigación. Es decir, hemos llevado los ingredientes conceptuales de los mercados financieros $\mathcal{M}$ y los conceptos de los espacios fibrados $\mathfrak{B}$ ubicados en el espacio de configuraciones de la mecánica clásica hacia un ambiente de configuraciones cuántico para analizar el dinamismo, las propiedades y el comportamiento volátil de los mercados financieros y darles interpretación financiera a sus resultados.

Hemos logrado algunos resultados sorprendentes, pero estamos seguros que estamos dejando lo más trascendente, por falta de revelación o imaginación. Sin embargo, hemos logrado demostrar que el tipo de álgebra con el que iniciamos la cuantización está correlacionado con los procesos estocásticos que gobiernan el proceso de actividades de intercambio de los activos en los mercado financieros.

Al analizar el flujo e involución de los activos financieros en los mercados se demuestra que los mercados financieros tienen una estructura fibrada intercomunicados mediante homomorfismos entre las álgebras que generan una multiplicidad de simetrías de significado financiero tanto en el espacio clásico como en el espacio cuántico cuya propiedad topológica describe la aleatoriedad de los activos en los mercados financieros.

En el desarrollo de esta investigación el resultado central es que se ha logrado construir los modelos de cuantización algebraica, sección 2.3, definición 2.3.1, para analizar la conducta volátil y otros aspectos dinámicos[44] de los mercados financieros. Esta construcción está cimentada por el teorema 2.4.1 y consolidada por la definición 2.3.1 y sus consecuencias.

[44] En realidad los modelos de cuantización algebraica, que se ha construido, se pueden aplicar a cualquier tipo de fenómeno que presente conducta caótica.

Más aún la utilidad de los modelos financieros de cuantización algebraica en los mercados financieros está concretizada por las aplicaciones que presentamos en el capítulo de resultados y por las aplicaciones que, estamos seguros, ocurrirán en el futuro por otros investigadores que miren este trabajo con otras perspectivas, por lo tanto es positivo y urgente considerar los puntos, las ideas y discusiones propuestas en la presente investigación.

5.2. Conclusiones

1. El modelo financiero $(\mathcal{M}, \mathfrak{B}, \mathfrak{Q})$ construido es una propuesta que toma en consideración la naturaleza continua de la variación de las variables aleatorias financieras que forman un álgebra y explican los cambios continuos de estado de los activos vistos en tiempo real continuo local micro y macroscópico y mantiene su característica esencial del proceso estocástico $\mathbb{X}(u, t)$ del modelo finito (o infinito) dimensional clásico.

2. El modelo usa en su configuración un formalismo físico-matemático-financiero simple evitando el cambio radical de sus observables clásicos (funciones continuas que forman un álgebra de Poisson), hacia operadores en un espacio de Hilbert, siguiendo el criterio de cuantización por deformación en el que acciona el homomorfismo Φ que transporta los activos del espacio clásico al espacio cuántico.

3. Concluimos, en general, que los modelos financieros de cuantización algebraica coadyuvan en el análisis de la volatilidad en los mercados financieros de capitales en ambos espacios clásico y cuántico, respectivamente.

4. Este estudio constituye la integración de tres disciplinas cientificas (matemática-física-finanzas) que dan lugar a un amalgamiento de simetrías y reglas de intercambio de activos que dan lugar a una geometría fibrada de los mercados financieros.

5. Los modelos financieros de cuantización algebraica sirven para un buen gerenciamiento de activos debido a que presentan en su estructura natural propiedades topológicas que coadyuvan a describir la aleatoriedad de los mercados financieros de capitales.

5.3. Recomendaciones

Luego de concretizada esta investigación acerca de los mercados financieros de capitales mediante una nueva metodología denominada modelos de cuantización algebraica optamos por dar a luz las siguientes recomendaciones.

1. Recomendamos el tratamiento de fenómenos dinámicos que varían aleatoriamente mediante los modelos de cuantización algebraica. Específicamente en los mercados financieros porque facilitan la descripción de un fenómeno financiero que no es completamente explicado por los modelos clásicos. En particular, recomendamos que urge considerar la propuesta que presentamos al inducir los modelos de cuantización algebraica como herramientas usadas para dar una mirada profunda al interior caótico y complejo de la volatilidad de los mercados financieros.

2. Del teorema 2.3.1. condición tres, hemos demostrado que la volatilidad puede ser estudiada y analizada en ambos espacios. Es decir, en el espacio fase clási-

co $(\mathfrak{M}, \omega)$ y en el espacio fase cuántico $(\mathfrak{M}^{'}, \omega^{'})$. Se recomienda investigar otras aplicaciones en otras disciplinas donde se observen fenómenos caóticos con variaciones de oleaje fluctuantes.

3. Los mercados financieros, especialmente su carácter volátil, son muy difíciles de controlar. Algunos autores sostienen que la volatilidad no se puede controlar. Más aún sostienen que cuando se habla de volatilidad no se sabe de qué se esta hablando, pero quizás es porque hasta la actualidad la humanidad sólo está usando modelos empíricos aproximados no apoyados por la teoría formalizada. Recomendamos que se enfatice el uso de la disciplina estadística financieras cuánticas que podrían ser una herramienta de solución y los modelos de cuantización algebraica podrian ser el "bisturí" de tratamiento de la conducta volátil de los mercados financieros. Recomendamos estudiar, aplicar y mejorar al modelo $(\mathcal{M}, \mathfrak{B}, \mathfrak{Q})$ para infinitos activos financieros.

4. Hacer más estudios comparativos de los modelos $(\mathcal{M}, \mathfrak{B}, \mathfrak{Q})$ con respecto a los modelos financieros tradicionales.

5. No se por qué nos preocupamos en construir una herramienta de utilidad financiera para los ricos que sólo constituyen el 1 % de la población en el planeta y son loe que menos necesitan, en lugar de buscar una herramienta que ayude a los pobres que representan el 99 % de la población terrenal, que sí necesitan ayuda. Con el perdón de Dios, esperamos y recomendamos que sepan darle uso equilibrado a esta herramienta si en verdad funcionara a favor de los ricos. Perdóname, Dios mío, por la avaricia de mis pensamientos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Abraham, R. and Marsden, J.E. (1985), *Foundations of Mechanics*, Addison-Wesley Publ. Comp., Massachusetts, pp 425-453.

[2] Allegretto, W. G. Barone-Adesi, and Elliott R.J. (1995), *Numerical evaluation of the critical price and American options*. Eur. J. of Finance,1:6978.

[3] Anali B. C. (2007), *Modelos de Medición de la Volatilidad de los Mercados de Valores: Aplicación al Mercado Bursátil Argentino*. Universidad Nac. de Cuyo-FCE.

[4] Artzner, P. and F. Delbaen. (1989), *Term structure of interest rates: The martingale approach*. Adv. Appl. Math., 10:95129.

[5] Atiyah M.F. y MacDonald I.G. (1969), *Introduction to Commutative Algebra.*, Massachusetts: Addison-Wesley Pub. Company.

[6] Bachelier, L. (1964), Theory of speculation. In P.H. Cootner, editor, *The Random Character of Stock Market Prices*, volume 1018 (1900) of Ann. Sci. Ecole Norm. Sup., pages 17-78. MIT Press, Cambridge, Mass.

[7] Bates, S. and Weinstein, A. (1995), *Lectures on the Geometry of Quantization*, Berkeley Lecture Notes 8, AMS, Providence.

[8] Barron, E.M. and R. Jensen. (1990),*A stochastic control approach to the pricing of options*. Math. Oper. Res., 15:49-79.

[9] Barucci, E. (2003), *Financial Markets Theory: Equilibrium, Eficiency and Information*. Springer, Heidelberg.

[10] Bayen, F., Flato, M., Fronsdal, C., Lichnerowicz, A., and Sternheimer, D. (1977) *Deformation theory and quantization*, I and II, Ann. Phys. 111, pp. 61-151.

[11] Benites S. and Menezes R. (2012) *Entropy: A new measure of stock market volatility?*. Journal of Phycics, series 394. IOP Publishing.

[12] Berezin, F.A., (1967) *Some remarks about the associated envelope of a Lie algebra*, Funct. Anal. Appl. 1, pp. 91-102.

[13] Berezin, F.A. (1974), *Quantization*, Math USSR Izv. 8, pp. 1109-1165.

[14] Berezin, F. A. (1975),*General Concept of Quantization*, Comm. Math. Phys. 40, pp. 153-174.

[15] Black, F. and Scholes, M. (1972), *The valuation of option contracts and a test of market eficiency*, J. Finance, 27:pp. 399-417.

[16] Bodie Z. y Merton R.C. (1999), *Finanzas*, Prentice Hall.

[17] Bouleau, N. and D. Lamberton (1989), *Residual risks and hedging strategies in Markovian markets*, Stochastic Process Appl., 33: pp. 131-150.

[18] Brealey y Myers (2005), *Principios de Finanzas Corporativas*, Mc Graw Hill.

[19] Chesney M. and Elliott R.J. (1995), *Estimating the instantaneous volatility and co-variance of risky assests*. Appl. Stochastic Models Data Anal., 11:51-58.

[20] Chesney M, R.J. Elliott R.J, D. Madan, and H. Yang (1995), *Difusion coeficient estimation and asset pricing when risk premia and sensitivities are time varying*. Math. Finance, 3:85-100.

[21] Cotfas, Liviu A. (2012), *A finite dimensional quamtum model for the stock market*, ArXiv: 1024.4614V2 [q-fin.GN].

[22] Cox, J.C., J.E. Ingersoll, and S.A. Ross (1985), *An intertemporal general equilibrium model of asset prices*. Econometrica, 53:363-384.

[23] Cox, J.C. and M. Rubinstein (1985), *Options Markets*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J.

[24] Cutland, E. Kopp, and W. Willinger (1993), *From discrete to continuous financial models: New convergence results for option pricing*. Math. Finance, 3:101-124.

[25] Dana, R. A. and Jeanblanc M. (2003), *Financial Markets in Continuous Time.* Springer, Heidelberg.

[26] Dirac, P.A.M. (1964), *Lectures on Quantum Mechanics*, Belfer Graduate School of Sciences Monog. Ser. 2, Yeshiva Univ., New York.

[27] Dothan, L.U. (1978), *On the term structure of interest rates*. J. Finan. Econ., 6:59-69.

[28] Dothan, L.U. (1990), *Prices in Financial Markets*. Oxford University Press, N.Y.

[29] Duffie, D. (1988), *Security Markets: Stochastic Models*. Academic Press, Boston.

[30] Duffie, D. *Futures Markets.* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1989.

[31] Duffie, D. (1992), *Dynamic Asset Pricing Theory.* Princeton University Press, Princeton, N.J.

[32] Duffie, D. and R. Kan. (1994), *Multi-factor term structure models*. Philos. Trans. R. Soc. London, 347:577-586.

[33] Eliashberg, J. and Lilien G.L. (1993), Eds., Handbooks in OR MS, Chapter 1, *Mathematical Marketing Models: Some Historical Perspectives and Future Projections*, Vol. 50 Elsevier Science Publishers B.V. All rights reserved.

[34] Elliott, R.J. and Chesney M. (1993), *Estimating the volatility of an exchange rate*. In J. Janssen and C. Skiadis, editors, 6th International Symposium on Applied Stochastic Models and Data Analysis, pages 131-135. World Scientific, Singapore.

[35] Elliott, R.J. and Kopp P.E. (2005), *Mathematics of Financial Markets*, 2nd Edition, Springer Science+Business Media Inc. pp. 48-50.

[36] Elliott, R.J. and J. van der Hoek (2007), *Binomial Models in Finance*. Springer, N. Y.

[37] Gerstenhaber, M. (1964), *On the Deformation of Rings and Algebras.* Ann. Math. 79, pp. 59-103.

[38] Gerstenhaber, M. and Schack, S., (1988), *Algebraic Cohomology and Deformation Theory*. NATO ASI Ser. C 247, pp. 11-264, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht.

[39] Kirill Ilinski (1999), *Gauge geometry of financial markets.* IPhys Group, CAPE, UK.

[40] Lee R. (2005), *Implied Volatility: statics, dynamics, and probabilistic interpretation*, in Recent Advances in Applied Probability, Sringer, pp. 241-268.

[41] Piotrowsky E. and Sladowky J. (2006), *Geometry of financial markets- Towards information theory model of markets*, I.M. Univ. of Biakystok, Poland.

[42] Romero M. and Gonzales O. (2011) The Black-Scholes equation and certain Hamiltonians, arXiv: 1002.1667V2 [math-ph].

[43] Ross S., Westerfield R., Jatte J. (1999), *Finanzas Corporativas*, New York: McGraw-Hill, 5ta Edición.

[44] Sandoval, L. (2010), *Correlación de los mercados financieros en tiempo de crísis*, ArXiv.0rg.

[45] Vanguard Inv. Counseling and Research, (2008), *Stock Market Volatility Measures in Perspective.*, www.vanguard.com

[46] Vouk Vladimir, (2011), *Rough paths in idealized financial markets*, arXiv:1005.0279v2.

[47] Weinstein, A. (1994), *Deformation Quantization*, Seminaire Bourbaki, expose 789, Asterisque 227, 389-409.

[48] Zhang C. and Huang L. (2010), *A quantum model for the stock market*, School of Economics and Business Administration, Chongping University, China.

ELECTRÓNICAS

[49] http://www.vanguard.com

[50] http://www.arxiv.org

[51] http://www.world-exchange.org

ANEXOS

ANEXO N^0 01

MATRIZ DE CONSISTENCIA

TÍTULO: MODELOS DE CUANTIZACIÓN ALGEBRAICA DE MERCADOS FINANCIEROS DE CAPITALES

PROBLEMAS	OBJETIVOS	HIPÓTESIS	OPERACIONALIZACIÓN
P. GENERAL	**O. GENERAL**	**H. GENERAL**	**VARIABLES**
¿De qué manera, los modelos de cuantización algebraica influyen en el análisis de los mercados financieros de capitales?.	Determinar y demostrar que los modelos de cuantización algebraica influyen en el análisis de los mercados financieros de capitales.	Los modelos de cuantización algebraica inciden favorablemente en el análisis de los mercados financieros de capitales.	**Variable independiente** $X :=$ **Modelos de cuantización algebraica. Variable dependiente** $Y :=$ **Mercados financieros de capitales**
P. ESPECÍFICOS	**O. ESPECÍFICOS**	**H. ESPECÍFICAS**	**INDICADORES**
1.- ¿De qué manera, el tipo de álgebra $\mathfrak{A}$ de los modelos de cuantización algebraica influye al proceso vectorial estocástico $\mathbb{X}(u,t)$ de los mercados financieros?.	**1.-** Precisar que el tipo de álgebra $\mathfrak{A}$ de los modelos de cuantización algebraica, influye en el proceso vectorial estocástico $\mathbb{X}(u,t)$ de los mercados financieros.	**1.-** El tipo de álgebra $\mathfrak{A}$ de los modelos de cuantización algebraica influye en el proceso vectorial estocástico $\mathbb{X}(u,t)$ de los mercados financieros.	X_1 := típo de álgebra $\mathfrak{A}$ de los modelos de cuantización algebraica. Y_1 := El proceso vectorial estocástico $\mathbb{X}(w,t)$ de los mercados financieros.

P. ESPECÍFICOS	O. ESPECÍFICOS	H. ESPECÍFICAS	INDICADORES
2.- ¿En qué medida, el homomorfismo Φ de las álgebras $\mathfrak{A}$ y $C^{\infty}(\mathfrak{M})$ de los modelos de cuantización explica la variación del riesgo y el rendimiento de las tasas de retornos Ξ y Δ de los mercados financieros?.	**2.-** Determinar que el homomorfismo Φ de las álgebras $\mathfrak{A}$ y $C^{\infty}(\mathfrak{M})$ de los modelos de cuantización explica la variación del riesgo y el rendimiento de las tasas de retornos Ξ y Δ de los mercados financieros.	**2.-** El homomorfismo Φ de las álgebras $\mathfrak{A}$ y $C^{\infty}(\mathfrak{M})$ de los modelos de cuantización explica la variación del riesgo y el rendimiento de las tasas de retornos Ξ y Δ de los mercados financieros.	X_2 :=el homomorfismo Φ de las álgebras $\mathfrak{A}$ y $C^{\infty}(\mathfrak{M})$ de los modelos de cuantización. Y_2 :=el riesgo y rendimiento de las tasas de retornos Ξ y Δ de los mercados financieros.
3.- ¿De qué manera, los espacios fases de los modelos de cuantización influye en el análisis de la volatilidad Θ de los mercados financieros?.	**3.-** Precisar que los espacios fases de los modelos de cuantización influyen en el análisis de la volatilidad Θ de los mercados financieros.	**3.-** Los espacios fases de los modelos de cuantización influyen en el análisis de la volatilidad Θ de los mercados financieros.	X_3 :=Los espacios fases del modelo de cuantización. Y_3 :=la volatilidad Θ de los mercados financieros.
4.- ¿Cómo las operaciones de desplazamiento paralelo e involuciones de los modelos de cuantización algebraica determinan las fibraciones geométricas de los mercados financieros?.	**4.-** Mostrar que las operaciones de desplazamiento paralelo e involuciones de los modelos de cuantización algebraica determinan las fibraciones geométricas de los mercados financieros.	**4.-** Las operaciones de desplazamiento paralelo e involuciones de los modelos de cuantización algebraica determinan las fibraciones geométricas de los mercados financieros.	X_4 :=las operaciones de desplazamiento paralelo e involuciones de los modelos de cuantización algebraica. Y_4 :=las fibraciones geométricas de los mercados financieros.

P. ESPECÍFICOS	O. ESPECÍFICOS	H. ESPECÍFICOS	INDICADORES
5.- ¿De qué manera, las propiedades topológicas de los modelos de cuantización algebraica describen la aleatoriedad de los mercados financieros?.	**5.-** Identificar las propiedades topológicas de los modelos de cuantización algebraica que describen la aleatoriedad de los mercados financieros.	**5.-** Las propiedades topológicas de los modelos de cuantización algebraica describen la aleatoriedad de los mercados financieros.	X_5 :=las propiedades topológicas de los modelos de cuantización algebraica. Y_5 := La aleatoriedad de los mercados financieros de capitales.

Población estratificada $N = 1561$ Inst. Financieras; Muestra $n = 246$ Inst. Financieras a estudiar: 155 Med. y 91 Grandes, (cuadro 3.3).

ANEXO N^0 02

THE $(\mathcal{M}, \mathcal{B}, \mathcal{Q})$ FINANCIAL MODELS

Javier M. Huarca Ochoa[45]

Accounting and Finance Department, USMP. Lima - Perú.

October 2015

Abstract

The financial crisis that occurred in the past were due to the volatile behavior of the systems economic financial has super complicated by the effects of the high correlation between the globalization of financial markets, the effects of migration, political decisions, the degradation of the environment such that no financial model or the rapid development of technology make it possible its control. In this article, we propose a MPF (mathematical-physical-financier) methodology for exploratory to counteract this problem by the $(\mathcal{M}, \mathfrak{B}, \mathfrak{Q})$ models that give birth to the triadic models of order (p, q, r) when $p, q, r \in \mathbb{Z}$. In particular we explain and apply the financier model $(6, 6, 6)$ and give financial performances and interpretations to the results of this research.

Key Words: Financial markets, fibre bundle, quantization, deformation, Poisson algebras.

TO BE PUBLISHED

[45] Supported by the USMP Research Foundation.